MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

K. KNOPP
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM
H. KNESER W. MAGNUS O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

58. BAND 4. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 6. JULI 1953)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1953

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z. B. die Landauschen Symbole o und O, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt, Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Biesingerstraße 7.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 24. — Göttingen, Weender Straße 60.

Vertriebsvertretung des Verlages im Ausland:

Lange, Maxwell & Springer Ltd., 242 Marylebone Road, London N.W. 1.

---

58. Band **Inhalt** 4. (Schluß-)Heft

Seite

Hellwig, G., Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern 337
Barthel, W., Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie 358
Kneser, M., und D. Puppe, Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten 376
Maass, H., Über die Zurückführung der Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Integralgleichungen 385
Neumer, W., Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. I. 391
Zeller, K., *FK*-Räume in der Funktionentheorie. II 414
Schäfke, F. W., Das Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen 436
Skovgaard, H., Note on the number of real zeros of the confluent hypergeometric function $F(a; c; x)$ 448
Gaier, D., Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren 453
Gaier, D., Schlichte Potenzreihen an der Konvergenzgrenze 456
Kneser, M., Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen 459

HELLWIG, G.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 337—357 (1953)

Anfangs- und Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen von wechselndem Typus auf den Rändern.

Von
GÜNTER HELLWIG.

Einleitung.

Wir betrachten die partielle Differentialgleichung

$$D[u] \equiv Bu + k(x)\{r_1 u_{yy} + r_2 u_y + r_3 u\} = k(x) f(x, y) \tag{1}$$

mit dem Differentialoperator $Bu = -(p(x) u_x)_x + q(x) u$ und machen die folgende

Voraussetzung (I). *y laufe im Intervall $0 \leqq y < \infty$. $p(x)$, $\frac{dp(x)}{dx}$, $q(x)$, $k(x)$ reell und stetig; $p > 0$, $k > 0$; alles im Intervall $l \leqq x \leqq m$. r_1, r_2, r_3; l, m seien irgendwelche Zahlen mit $l < m$, $r_1 > 0$.*

Über $f(x, y)$ werden später Voraussetzungen angegeben.

Die Charakteristiken von (1) werden durch die Differentialgleichung

$$-p(x)\dot{y}^2 + r_1 k(x)\dot{x}^2 = 0, \tag{2}$$

die charakteristischen Richtungen durch

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{r_1}\sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}} \tag{3}$$

gegeben. Wir nennen (1) in einem Punkt (x, y) aus $l \leqq x \leqq m$, $0 \leqq y < \infty$ von *hyperbolischem* bzw. *parabolischem* Typus, wenn dieser Punkt Träger genau zweier verschiedener, reeller charakteristischer Richtungen bzw. Träger genau einer charakteristischen Richtung (3) ist. Nach Voraussetzung (I) ist (1) in $l \leqq x \leqq m$, $0 \leqq y < \infty$ hyperbolisch[1]).

Wir stellen zu (1) noch geeignete Anfangsbedingungen (4) und Randbedingungen (5):

$$\lim_{y \to 0} u(x, y) = u_0(x), \qquad \lim_{y \to 0} u_y(x, y) = u_1(x)\ ^{2}); \tag{4}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to l} u(x, y) \cos\delta + \lim\limits_{x \to l} u_x(x, y) \sin\delta = 0, \\ \lim\limits_{x \to m} u(x, y) \cos\vartheta + \lim\limits_{x \to m} u_x(x, y) \sin\vartheta = 0 \end{cases} \tag{5}$$

mit $0 \leqq \delta, \vartheta < \pi$.

[1]) Wenn $r_1 = 0$ und $r_2 > 0$ vorausgesetzt wird, so ist (1) in $l \leqq x \leqq m$, $0 \leqq y < \infty$ parabolisch. Dieser Fall kann ebenfalls immer in unseren Betrachtungen zugelassen werden.

[2]) Bei [1]) fällt die zweite Anfangsbedingung weg.

Die rechte Seite ist uns bekannt, wenn wir die Anfangsbedingungen (4) als gestellt annehmen. Tun wir dies und führen wir die Abkürzungen

$$(8) \qquad -(r_1 s^2 + r_2 s + r_3) = \lambda, \qquad h = (r_1 s + r_2)\, u_0(x) + r_1 u_1(x)$$

mit $\lambda = \varrho + i\mu$, sowie den neuen Operator

$$(9) \qquad A v \equiv \frac{1}{k(x)} B v = \frac{1}{k(x)} \{-(p(x) v')' + q(x) v\}, \qquad v' \equiv \frac{dv}{dx},$$

ein, so erhalten wir aus (7)

$$(10) \qquad A v = \lambda v + h + g.$$

Wir nennen die Gesamtheit aller komplexwertigen Funktionen $v(x)$, für die im Sinne von LEBESGUE $\int_l^m |v(x)|^2 k(x)\, dx < \infty$ ausfällt den *Hilbertschen Raum* $\mathfrak{H}$ mit dem inneren Produkt $(v, w) = \int_l^m \overline{v}(x)\, w(x)\, k(x)\, dx$ und der Norm $||v|| = \sqrt{(v, v)}$. $A v = \lambda v$ in (10) stellt ein Eigenwertproblem in $\mathfrak{H}$ dar. Nun ist A nur in einem Teilraum $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}}$ [bei den Voraussetzungen (I)] bzw. $\mathfrak{W}_{\mathrm{II}}$ [bei (II)] aus $\mathfrak{H}$ erklärbar[5]).

Es ist die Gesamtheit aller $v(x)$ mit

I.) v, v', v'' stetig in $l \leq x \leq m$ (l, m endlich) der Teilraum $\mathfrak{W}_{\mathrm{I}}$;

II.) v, v', v'' stetig in $l < x < m$ ($l = -\infty$, $m = +\infty$ zugelassen), $||v||^2 < \infty$, $||A v||^2 < \infty$ der Teilraum $\mathfrak{W}_{\mathrm{II}}$.

Setzen wir in (10) $g = h = 0$, so können wir sofort für die Funktion $Lu = v$ „zulässige Randbedingungen" (Bezeichnung nach K. FRIEDRICHS [7]) angeben: A soll in einem geeigneten Teilraum von $\mathfrak{H}$ genau eine Spektralzerlegung besitzen. Dies ist gewiß der Fall, wenn A in $\widehat{\mathfrak{A}}$ selbstadjungiert ist und dazu genügt, daß A in $\mathfrak{A} < \widehat{\mathfrak{A}}$ wesentlich selbstadjungiert ist. Solche Teilräume $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}, \mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$ können unter den Voraussetzungen (I), (II) bekanntlich stets angegeben werden [11].

$\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$: $v \in \mathfrak{W}_{\mathrm{I}}$ mit $v(l) \cos\delta + v'(l) \sin\delta = 0$, $v(m) \cos\vartheta + v'(m) \sin\vartheta = 0$.

$\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$: 1. Wenn bei $x = l$, $x = m$ der Grenzpunktfall[6]) vorliegt, so ist $\mathfrak{A}_{\mathrm{II}} \equiv \mathfrak{W}_{\mathrm{II}}$.

2. $x = l$, $x = m$, Grenzkreisfall. Wir setzen

$$[w, v]_x = p(x) \{\overline{w}'(x)\, v(x) - \overline{w}(x)\, v'(x)\} \quad \text{und} \quad [w, v]_l = \lim_{x \to l} [w, v]_x.$$

[5]) Die folgenden Bezeichnungen nach F. RELLICH [11].

[6]) Man sagt nach H. WEYL [15]: Bei $x = l$ liegt der Grenzpunktfall vor, wenn es für jedes reelle oder komplexe λ eine Lösung von $A v = \lambda v$ mit $\int_l^r |v|^2 k\, dx = \infty$ ($l < r < m$) gibt. Bei $x = l$ liegt der Grenzkreisfall vor, wenn für jedes reelle oder komplexe λ alle Lösungen von $A v = \lambda v$ die Eigenschaft haben, daß $\int_l^r |v|^2 k\, dx < \infty$ ist.

$\alpha(x), \beta(x)$ seien nicht identisch verschwindende Lösungen von $A z = i z$ mit $[\alpha, \alpha]_l = 0$, $[\beta, \beta]_m = 0$, $p(\alpha' \beta - \alpha \beta') = 1$. Es ist dann $\mathfrak{A}_{II}$:

$$v \in \mathfrak{W}_{II} \quad \text{mit} \quad [\alpha, v]_l = 0, \quad [\beta, v]_m = 0.$$

3. $x = l$ Grenzkreisfall, $x = m$ Grenzpunktfall. α sei Lösung von $A z = i z$ mit $[\alpha, \alpha]_l = 0$. $\mathfrak{A}_{II}$: $v \in \mathfrak{W}_{II}$ mit $[\alpha, v]_l = 0$.

Wir schreiten zur Auflösung der Gl. (10) und setzen $A - \lambda I \equiv A_\lambda$. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Gleichung $A_\lambda v = j$. Die Gesamtheit aller in $l \leq x \leq m$ (l, m endlich) stetigen Funktionen $j(x)$ sei $\mathfrak{H}'_I$, die Gesamtheit aller in $l < x < m$ ($l = -\infty$, $m = +\infty$ zugelassen) stetigen Funktionen mit $||j||^2 < \infty$ sei $\mathfrak{H}'_{II}$. Jedes $v \in \mathfrak{A}_{I,II}$ erlaubt die Darstellung $v = A_\lambda^{-1} j$ mit $j \in \mathfrak{H}'_{I,II}$, wenn $\lambda \in R(\lambda)$ ist. Dabei ist A_λ^{-1} der zu A_λ reziproke Operator. Er existiert und ist ein beschränkter Operator dann und nur dann, wenn $\lambda \in R(\lambda)$. $R(\lambda)$ ist die Resolventenmenge von A, die aus allen Punkten der komplexen λ-Ebene besteht, die nicht zum Spektrum von A gehören (Spektrum $\doteq$ Punktspektrum + kontinuierliches Spektrum + Häufungsspektrum; vgl. [*13*] S. 129ff.). Für solche λ ist A_λ^{-1} in Form eines Integraloperators, nämlich als Greensche Resolvente darstellbar: $A_\lambda^{-1} j = \int_l^m G(x, t, \lambda)\, k(t)\, j(t)\, dt$. ([*13*], Kap. X, § 3). Ferner ist $v = A_\lambda^{-1} j$ in λ für $\lambda \in R(\lambda)$ analytisch ([*13*] S. 141, [*12*] S. 405ff.). Wir machen für das folgende noch die notwendige

Voraussetzung (III). *Es sei A in $\mathfrak{A}_{II}$ halbbeschränkt mit der Schranke a, d.h.* $\frac{(v, Av)}{(v, v)} > a$ *mit fester Zahl a für alle $v \not\equiv 0$ aus $\mathfrak{A}_{II}$.* Eine gleichbedeutende Formulierung wäre: Das Spektrum von A bleibt oberhalb a[7]).

Da A in $\mathfrak{A}$ wesentlich selbstadjungiert ist, liegt das Spektrum auf der reellen φ-Achse. Nach (III) können höchstens die Punkte $\varphi > a$ der $\lambda = \varphi + i\mu$-Ebene zum Spektrum gehören. Wir ersetzen wieder λ durch $-(r_1 s^2 + r_2 s + r_3)$ [vgl. (8)] und bezeichnen mit A_s^{-1} die Reziproke von $(A + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3) I) v = j$ mit $v \in \mathfrak{A}$. Da $Lu = v$ gesetzt war, so müssen wir nachweisen, wenn die Anwendung der Laplace-Transformation überhaupt sinnvoll sein soll, daß $v(x, s)$ in einer rechten Halbebene analytisch ist. Dazu ist hinreichend, daß alle Punkte $\varphi > a$ der reellen φ-Achse in der $s = \xi + i\eta$-Ebene nicht in eine geeignete rechte Halbebene $\xi > \xi_0$ eindringen. Wir haben

$$(11) \qquad \varphi = -(r_1 \xi^2 - r_1 \eta^2 + r_2 \xi + r_3), \qquad \mu = -\eta (r_2 + 2 \xi r_1).$$

Es ist $\mu = 0$ für $\eta = 0$ oder für $\xi = -\frac{r_2}{2 r_1}$. Durch geeignete Wahl von ξ_0 kann der zweite Fall ausgeschlossen werden. Nun ist $\varphi = -(r_1 \xi^2 + r_2 \xi + r_3)$. Indem wir ξ_0 hinreichend groß wählen, folgt wegen $r_1 > 0$, daß $\varphi < a$ ist. Damit ist

[7]) A in $\mathfrak{A}_I$ ist stets halbbeschränkt.

gezeigt, daß $v(x, s) = A_s^{-1} j$ in einer rechten Halbebene $\xi > \xi_0 > 0$ analytisch in s ist und A_s^{-1} dort existiert und ein beschränkter Operator ist[8]).

Setzen wir zunächst $g \equiv 0$ in (10) [d.h. $f(x, y) \equiv 0$ in (1)] und $j = h$, so folgt die Bedingung $h \in \mathfrak{H}'_{\mathrm{I,II}}$. Dies liefert uns mit (8) sofort

zulässige Anfangsbedingungen für (I): $u_0(x), u_1(x)$ in $l \leqq x \leqq m$ stetig bei Voraussetzung (I). $u_0(x), u_1(x)$ stetig in $l < x < m$ und $||u_0(x)||^2 < \infty$, $||u_1(x)||^2 < \infty$ bei Voraussetzung (II).

Zulässige Randbedingungen zu (1) nennen wir solche, die nach formaler Anwendung der Laplace-Transformation in solche des Teilraumes $\mathfrak{A}$ übergehen. Dabei ist es günstig, daß sich die Randbedingungen nur auf die Variable x beziehen, die ohnehin bei der L-Transformation die Rolle eines Parameters spielt.

Zulässige Randbedingungen für (1):

a) Unter Voraussetzung (I): Randbedingungen der Form (5),

b) unter Voraussetzung (II): 1. $x = l$, $x = m$ Grenzpunktfall[9]): keine Randbedingungen, 2. $x = l$, $x = m$ Grenzkreisfall: $[\alpha, u]_l = 0$, $[\beta, u]_m = 0$, 3. $x = l$ Grenzkreisfall, $x = m$ Grenzpunktfall: $[\alpha, u]_l = 0$.

Die Randbedingungen unter der Voraussetzung (II) können noch durch eine weitere Bedingung ergänzt werden. In allen Fällen wird uns formal durch

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy} v(x, s)\, ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy} (A_s^{-1} h)\, ds$$

eine Lösung von (1) mit $f \equiv 0$ unter den obigen Rand- und Anfangsbedingungen gegeben. Nun ist $||v||^2 < \infty$ in allen Fällen. Wir wollen daher festsetzen, daß die zulässigen Randbedingungen unter Voraussetzung (II) stets durch die weitere zulässige Bedingung $\int_l^m |u(x, y)|^2 k(x)\, dx < \infty$ ergänzt werden können. Daß diese Ergänzung durchaus im Wesen der Sache liegt, kann erst in Abschnitt II gezeigt werden.

§ 2. Diskussion der zulässigen Randbedingungen.

Nur wenn auf einen oder beiden Rändern der Grenzkreisfall vorliegt, ist eine Diskussion der zulässigen Randbedingungen notwendig. Es genügt, die Diskussion an einem Ende, etwa $l = 0$, durchzuführen. Wir machen die

[8]) Hiermit ist auch die Notwendigkeit für die Voraussetzung (III) dargetan. Sobald das Spektrum von A in der λ-Ebene nach $-\infty$ reicht, gibt es im allgemeinen keine Halbebene mehr, in der $v(x, s)$ analytisch ist. Für den parabolischen Fall ($r_1 = 0$, $r_2 > 0$) gilt ganz Analoges. Gleichzeitig erkennen wir, daß es bei elliptischen Differentialgleichungen der Form (1) (dies bedeutet $r_1 < 0$) im allgemeinen keine rechte Halbebene gibt, in der $v(x, s)$ analytisch ist, auch dann nicht, wenn A halbbeschränkt ist. Wie man auch dann noch, allerdings in sehr einfachen Fällen, die Anwendbarkeit der Laplace-Transformation erzwingen kann, dazu vgl. man G. DOETSCH [5] S. 378.

[9]) Wir sagen, daß für (1) bei $x = l$ der Grenzkreis- oder Grenzpunktfall vorliegt, wenn in den transformierten Eigenwertproblemen $A v = \lambda v$ der Grenzkreis- oder Grenzpunktfall vorliegt.

Voraussetzung (IV). *Es liegen die Voraussetzungen (II) in $0<x<m$ vor und $l=0$ sei eine Stelle der Bestimmtheit für alle λ bezüglich der Gleichung $Av=\lambda v$. Bei $l=0$ liege der Grenzkreisfall vor.*

Man hat dann (vgl. [10]) $p(x)=x^{\sigma}(p_0+p_1x+\cdots), q(x)=x^{\sigma-2}(q_0+q_1x+\cdots)$, $k(x)=x^{\sigma-2}(k_0+k_1x+\cdots)$, alles in einer hinreichend kleinen Umgebung um den Punkt $x=0$ mit reellem σ; $p_0\neq 0$, $p_1, p_2, \ldots$; $q_0, q_1, \ldots$; $k_0, k_1, \ldots$. Es gibt sicher eine Zahl ν_0 so, daß $k_{\nu_0}\neq 0$ und $k_\nu=0$ für $\nu<\nu_0$. Mit dem Ansatz $v=x^{\varrho}+\cdots$ ergibt sich aus $Av=\lambda v$ die charakteristische Gleichung

$$\varrho^2+(\sigma-1)\varrho+\lambda\frac{k_0}{p_0}-\frac{q_0}{p_0}=0 \tag{12}$$

mit den Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 (Realteil $\varrho_1=r_1$, Realteil $\varrho_2=r_2$, $r_1\geqq r_2$). Wenn bei $x=0$ der Grenzkreisfall vorliegt, muß nach F. Rellich $\nu_0>r_1-r_2\geqq 0$ sein ([10] S. 707). Die Randbedingungen $[\alpha, v]_0=0$ gehen unter Voraussetzung (IV) über in

$$\begin{cases} v_0\cos\delta+v_1\sin\delta=0, & 0\leqq\delta<\pi \quad \text{wenn} \quad \varrho_1,\varrho_2 \quad \text{reell} \\ v_0e^{i\delta}+v_1e^{-i\delta}=0, & 0\leqq\delta<\pi \quad \text{wenn} \quad \varrho_1,\varrho_2 \quad \text{nicht reell.} \end{cases} \tag{13}$$

Dabei sind v_0, v_1 die Rellichschen Anfangszahlen ([10] S. 710—712). Aus der Darstellung von v_0, v_1 in [10] kann man überdies zeigen, daß $v_0=v(0)$, $v_1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{v(x)-v(0)}{x}=v'(0)$ dann und nur dann eintritt, wenn $\sigma=q_0=q_1=0$ ist. Den Beweis werden wir im Anhang erbringen. Wir erhalten den folgenden

Satz: a) *Wird (1) unter den Voraussetzungen (IV) betrachtet, so gehen die auf dem linken Rand zu stellenden zulässigen Randbedingungen $[\alpha, u]_0$ dann und nur dann in die Gesamtheit der Randbedingungen (5) über, wenn $\sigma=q_0=q_1=0$ ist.*

b) *$x=0$ ist genau dann ein hyperbolischer Rand wenn $\nu_0=2$, ein parabolischer Rand und Träger der charakteristischen Spitzen wenn $\nu_0>2$, ein parabolischer Rand und Einhüllende der Charakteristiken wenn $\nu_0<2$ ist.*

c) *Im letzten Fall gehen die Randbedingungen $[\alpha, u]_0=0$ niemals in die Gesamtheit der Randbedingungen (5) über:*

Beweis. b) Es ist $\sqrt{\frac{k(x)}{p(x)}}=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{k_0+k_1x+\cdots}{p_0+p_1x+\cdots}}$ in einer hinreichend kleinen Umgebung um $x=0$.

c) Da bei $x=0$ der Grenzkreisfall vorliegt muß $\nu_0>r_1-r_2=1$ sein, was im Widerspruch zu $\nu_0<2$ steht.

Beispiel: $-u_{xx}+x^q\{r_1u_{yy}+r_2u_y+r_3u\}=0$; $0<y<\infty$, $0<x\leqq 1$; $q=0, \pm 1 \pm 2+\cdots$. $x=0$ ist eine Stelle der Bestimmtheit, parabolischer Rand und Träger der charakteristischen Spitzen für $q=1, 2, 3, \ldots$. Für $x=0$ liegt ferner der Grenzkreisfall vor. Die zulässigen Randbedingungen nehmen die einfache Form $\lim\limits_{x\to 0}u(x, y)\cos\delta+\lim\limits_{x\to 0}u_x(x, y)\sin\delta=0$ an. Eine bemerkenswerte Auszeichnung dieses Beispieles liegt darin, daß bei $x=0$ der Grenzpunktfall dann und nur dann vorliegt, wenn $x=0$ parabolischer Rand und

Einhüllende der Charakteristiken ist. Der Spezialfall

$$-u_{xx}+x\,u_{yy}=0$$

ist in der Gasdynamik der schnallnahen Strömung von Interesse und mehrfach untersucht worden. So lösen S. BERGMANN [16], L. BERS [17], P. GERMAIN und R. BADER [18], M. H. PROTTER [19] für diese und allgemeinere Gleichungen das CAUCHYsche Problem für einen hyperbolischen Bereich mit vorgegebenen Daten auf der parabolischen Anfangskurve, die stets Träger der Spitzen der Charakteristiken ist. Ferner wird in [17], [18], [19] das Randwertproblem für ein hyperbolisch-parabolisches Gebiet betrachtet mit vorgeschriebenen Daten längs einer Charakteristik und einer parabolischen Anfangskurve (Träger der Spitzen).

Abschnitt II: Ein Existenzsatz.

Für die Anwendungen erweist sich nun der Fall, daß unter den Voraussetzungen (II) bei $x=l$ und bei $x=m$ der Grenzpunktfall vorliegt, sowie der Fall, daß auf einem Rand der Grenzpunktfall, auf dem anderen Rande dagegen die Voraussetzungen (I) erfüllt sind und somit dort die Randbedingung (5) gestellt werden kann, als besonders wichtig. Wir geben für den ersten Existenzsätze. Die Diskussion der damit in der mathematischen Physik erfaßten Probleme wird auf S. 356 durchgeführt. Der andere Fall erledigt sich analog.

§ 1. Die homogene Differentialgleichung (1).

Satz 1. *Vorgegeben sei die homogene Differentialgleichung (1) $(f(x,y)\equiv 0)$ unter den Voraussetzungen (II) und (III). Bei $x=l$, $x=m$ liege der Grenzpunktfall vor.*

Es werden die Anfangsbedingungen (4) gestellt mit $u_0(x)$ dreimal, $u_1(x)$ zweimal stetig differenzierbar in $l<x<m$. $\frac{d}{dx}A\,u_0$ sei stetig in $l<x<m$. Ferner sei $||u_0||^2<\infty$, $||u_1||^2<\infty$, $||A\,u_0||^2<\infty$, $||A\,u_1||^2<\infty$, $\left\|\frac{d}{dx}u_0\right\|^2<\infty$, $\left\|\frac{d}{dx}u_1\right\|^2<\infty$, $\left\|\frac{d}{dx}A\,u_0\right\|^2<\infty$. Randbedingungen sind nicht vorhanden[10].

Für A_s^{-1} sollen die folgenden Abschätzungen für $|s|>R_0$ und $\xi>\xi_0$ bei geeignet großem R_0 und ξ_0 gelten:

$$(14)\qquad |A_s^{-1}j|\leq\frac{M_1}{|s|},\qquad \left|\frac{d}{dx}A_s^{-1}j\right|\leq M_2,$$

wenn $j(x)$ in $l<x<m$ stetig und $||j||^2<\infty$ ist;

$$(15)\qquad |A_s^{-1}j|\leq\frac{M_3}{|s|^2},\qquad \left|\frac{d}{dx}A_s^{-1}j\right|\leq\frac{M_4}{|s|},$$

[10]) Die Ergänzung der Randbedingung durch die Bedingung $\int_l^m|u(x,y)|^2\,k(x)\,dx<\infty$ wird in § 2 untersucht.

wenn $j(x)$ *in* $l<x<m$ *stetig differenzierbar und* $\|j\|^2, \left\|\frac{dj}{dx}\right\|^2 < \infty$. *Dabei sind* $M_1 \dots M_4$ *von* x *und* s *unabhängige Zahlen*[11]).

Behauptung:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy} (A_s^{-1} h)\, ds \tag{16}$$

mit $h = (r_1 s + r_2)\, u_0(x) + r_1 u_1(x)$ [*vgl.* (8)] *ist fast überall eine Lösung von* (1) *und erfüllt die Anfangsbedingungen* (4). *Dabei ist* $\xi_1 > \xi_0$ *und* ξ_0 *so gewählt, daß die obigen Abschätzungen für* $\xi > \xi_0$ *und* $|s| > R_0$ *gelten und* $A_s^{-1} h$ *in der Halbebene* $\xi > \xi_0$ *analytisch in* s *ist*[12]).

Bemerkungen. Dem Integral in (16) wird im Beweis ein präziser Sinn beigelegt. Die geforderten Abschätzungen (14), (15) sind unter den Voraussetzungen (I) stets erfüllt. Es folgt dies aus dem bekannten asymptotischen Verhalten der Lösungen von $\left(A + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3)\, I\right) v = 0$ in bezug auf dem komplexen Parameter s durch die Sätze von G. D. Birkhoff und H. Tamarkin [*14*], indem man die Greensche Resolvente auf ihr asymptotisches Verhalten in s untersucht [*8*]. Unter den wesentlich allgemeineren Voraussetzungen (II) sind solche allgemeine, zu den von Birkhoff und Tamarkin analoge Sätze nicht bekannt. Man zeigt unter anderem leicht, daß die geforderten Abschätzungen (14), (15) erfüllt sind, wenn die Koeffizienten in (1) konstant sind und $l = -\infty$, $m = +\infty$ ist. (Es liegt dann der Grenzpunktfall vor.)

Beweis. Nach S. 341 existiert A_s^{-1} in der Halbebene $\xi > \xi_0$ und ist analytisch in s. Die Anfangsbedingungen $u_i(x)$, $i = 0, 1$ sind Lösungen von

$$\left(A + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3)\, I\right) v = A\, u_i + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3)\, u_i, \qquad i = 0, 1.$$

Es ist nach unseren Voraussetzungen $u_i \in \mathfrak{A}_{II}$. Daher gilt die Darstellung

$$u_i(x) = A_s^{-1} A\, u_i + (r_1 s^2 + r_2 s + r_3)\, A_s^{-1} u_i. \tag{17}$$

Aus (17) folgt

$$(r_1 s + r_2)\, A_s^{-1} u_0 = \frac{u_0}{s} - \frac{1}{s} A_s^{-1} (A\, u_0 + r_3 u_0),$$

$$r_1 A_s^{-1} u_1 = \frac{u_1}{s^2} - \frac{1}{s^2} A_s^{-1} \left(A\, u_1 + (r_2 s + r_3)\, u_1\right).$$

Damit wird aber bei Beachtung von $v = A_s^{-1} h$ [vgl. (8)]

$$v(x,s) = \frac{u_0(x)}{s} + \frac{u_1(x)}{s^2} + w(x,s) \tag{18}$$

---

[11]) Die getrennte Aufzählung der Abschätzungen soll angeben, daß (15) aus (14) im allgemeinen durch partielle Integration gewonnen werden kann. Es genügt, wenn die Abschätzungen (14), (15) nur gelten für ein abgeschlossenes Intervall $l_1 \leq x \leq m_1$ mit $l_1 > l$, $m_1 < m$. Ferner können die Abschätzungen noch durch etwas schwächere ersetzt werden.

[12]) Nach S. 341 ist ein solches ξ_0 unter der notwendigen Voraussetzung (III) stets zu bestimmen.

mit den Abkürzungen

$$(19)\quad w(x,s) = -\frac{1}{s}A_s^{-1}z \quad \text{und} \quad z(x,s) = A u_0 + \frac{1}{s}A u_1 + r_3 u_0 + \left(r_2 + \frac{r_3}{s}\right)u_1.$$

Es ist H.W. $\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty}\frac{e^{sy}}{s}ds = 1$ für $y>0$ ([5] S. 105) und das Integral konvergiert gleichmäßig in y für $0<\varepsilon\leqq y\leqq y_0<\infty$. Ferner ist $\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty}\frac{e^{sy}}{s^2}ds = y$ für $y\geqq 0$ und das Integral konvergiert gleichmäßig für $0\leqq y\leqq y_0<\infty$.

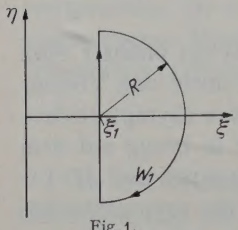

Fig. 1.

Wir wollen nun dem Integral (16) einen präzisen Sinn beilegen. Mit (18) definieren wir die Funktion $u(x,y)$ durch

$$(20)\quad u(x,y) = u_0(x) + u_1(x)\,y + \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{sy}\,w(x,s)\,ds$$

und verwenden die symbolische Schreibweise (16) lediglich als Abkürzung für (20). Das letzte Integral ist gleichmäßig konvergent in x und y ($l<x<m$ und $0\leqq y\leqq y_0<\infty$) für $|s|>R_0$, denn der Integrand hat die Ordnung $1/|s|^2$. Weiter ergibt sich $\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} w(x,s)\,ds = 0$ nach dem Cauchyschen Satz und unseren Abschätzungen, indem man das Integral

$$\int_W w(x,s)\,ds = \int_{\xi_1-iR}^{\xi_1+iR} w(x,s)\,ds + \int_{W_1} w(x,s)\,ds$$

betrachtet für $R\to\infty$. Aus (20) folgt daher: $\lim_{y\to 0} u(x,y) = u_0(x)$. Wir bemerken ferner, daß sich mit den schärferen Abschätzungen (15) die gleichmäßige Konvergenz in x und y der Integrale

$$\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} s\,e^{sy}\,w(x,s)\,ds \quad \text{und} \quad \int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{sy}\,w'(x,s)\,ds, \qquad w' \equiv \frac{dw(x,s)}{dx},$$

ergibt für $|s|>R_0$. Wie oben folgt ebenfalls $\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} s\,w(x,s)\,ds = 0$. Aus (20) ergibt sich daher das Erfülltsein auch der zweiten Anfangsbedingung $\lim_{y\to 0} u_y(x,y) = u_1(x)$. Wir zeigen nun, daß (20) die integrierte Gl. (1) erfüllt. Mit $l<n<m$ haben wir

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \int_n^x\int_0^y D[u]\,dx\,dy \equiv & -\int_0^y \{p(x)\,u_x - (p(x)\,u_x)|_{x=n}\}\,dy + \\ & + \int_n^x \Big\{\big(q(x) + r_3 k(x)\big)\int_0^y u\,dy\Big\}\,dx + \\ & + \int_n^x k(x)\,\{r_1(u_y - u_y|_{y=0}) + r_2(u - u|_{y=0})\}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Indem wir (20) nach y integrieren finden wir

$$(22)\quad \begin{cases} \int\limits_0^y u(x,y)\,dy = u_0(x)\,y + u_1(x)\,\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,w(x,s)\int\limits_0^y e^{sy}\,dy \\ \qquad\qquad = u_0(x)\,y + u_1(x)\,\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\,w(x,s)\,ds, \\ \displaystyle\int\limits_0^y u_x(x,y)\,dy = u_0'(x)\,y + u_1'(x)\,\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\,w'(x,s)\,ds. \end{cases}$$

Ersetzen wir nun u, u_x, u_y durch die sich aus (20) ergebenden Ausdrücke und $\int\limits_0^y u\,dy$, $\int\limits_0^y u_x\,dy$ durch (22), so wird (21)

$$(23)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_n^x\int\limits_0^y D[u]\,dx\,dy = y\Big\{-p(x)\,u_0'(x) + \big(p(x)\,u_0'(x)\big)\big|_{x=n} + \\ + \displaystyle\int\limits_n^x \big(q(x)\,u_0(x) + k(x)\,(r_2\,u_0(x) + r_3\,u_1(x))\big)\,dx\Big\} + \\ + \dfrac{y^2}{2}\Big\{-p(x)\,u_1'(x) + \big(p(x)\,u_1'(x)\big)\big|_{x=n} + \displaystyle\int\limits_n^x \big(q(x) + r_3\,k(x)\big)\,u_1(x)\,dx\Big\} + \\ + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\Big\{-p(x)\,w'(x,s) + \big(p(x)\,w'(x,s)\big)\big|_{x=n} + \\ + \displaystyle\int\limits_n^x \big(k(x)\,(r_1 s^2 + r_2 s + r_3) + q(x)\big)\,w(x,s)\,dx\Big\}\,ds. \end{cases}$$

Die Vertauschung der Integrationsfolge ist legitim wegen der gleichmäßigen Konvergenz. Nun genügt $v(x,s) = \frac{u_0(x)}{s} + \frac{u_1(x)}{s^2} + w(x,s)$ der Gleichung

$$(24)\quad Bv + k(x)\,\{r_1 s^2 + r_2 s + r_3\}\,v - k(x)\,\{(r_1 s + r_2)\,u_0(x) + r_1 u_1(x)\} = 0.$$

Indem man die Darstellung von v in (24) einsetzt und einmal nach x partiell integriert, folgt:

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{s}\Big\{-p(x)\,u_0'(x) + \big(p(x)\,u_0'(x)\big)\big|_{x=n} + \\ + \displaystyle\int\limits_n^x \big(q(x)\,u_0(x) + k(x)\,(r_3\,u_0(x) + r_2\,u_1(x))\big)\,dx\Big\} \\ + \dfrac{1}{s^2}\Big\{-p(x)\,u_1'(x) + \big(p(x)\,u_1'(x)\big)\big|_{x=n} + \\ + \displaystyle\int\limits_n^x \big(q(x) + r_3\,k(x)\big)\,u_1(x)\,dx\Big\} \\ -p(x)\,w'(x,s) + \big(p(x)\,w'(x,s)\big)\big|_{x=n} + \\ + \displaystyle\int\limits_n^x \big(k(x)\,(r_1 s^2 + r_2 s + r_3) + q(x)\big)\,w(x,s)\,dx = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man (25) mit $\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{sy}}{s}$ und integriert nach s von $\xi_1 - i\infty$ bis $\xi_1 + i\infty$, so folgt daraus, daß in (23) $\int_n^x \int_0^y D[u]\, dx\, dy = 0$ ist, d.h. unser durch (20) dargestelltes u erfüllt die integrierte Gleichung. Daher ist in (21) die rechte Seite Null. Wir ordnen diese rechte Seite um und erhalten

$$(26)\qquad \begin{cases} -\int_0^y p(x)\, u_x\, dy + r_1 \int_n^x k(x)\, u_y\, dx \\ \quad = -\int_0^y (p(x)\, u_x)|_{x=n}\, dy - \int_n^x \left\{(q(x) + r_3 k(x)) \int_0^y u\, dy\right\} dx - \\ \quad\quad - \int_n^x k(x)\{-r_1 u_1(x) + r_2(u - u_0(x))\}\, dx. \end{cases}$$

Da die rechte Seite von (26) nach x und y differenzierbar ist, ist es auch die linke und man hat

$$(27)\qquad \begin{cases} \left(\left(-\int_0^y p(x)\, u_x\, dy\right)_x + r_1 k(x)\, u_y\right)_y + q(x)\, u + k(x)\{r_2 u_y + r_3 u\} = 0, \\ \left(-p(x)\, u_x + r_1 \left(\int_n^x k(x)\, u_y\, dx\right)_y\right)_x + q(x)\, u + k(x)\{r_2 u_y + r_3 u\} = 0. \end{cases}$$

Würde man in (20) u_{yy} durch zweimaliges Differenzieren unter dem Integral bilden, so tritt das Integral $\int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} s^2 e^{sy} w(x, s)\, ds$ auf. Setzt man $s^2 w(x, s) = W(x, s)$, so hat $W(x, s)$ nach (19) und (15) die Ordnung $\frac{1}{|s|}$, d.h. das Integral

$$(28)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} |W(x, \xi_1 + i\eta)|^2\, d\eta$$

existiert. Daraus schließt man mit [9] wie bei W. MÄCHLER [8], daß $\left(\int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy} w(x, s)\, ds\right)_{yy}$ fast überall existiert und daß fast überall

$$(29)\qquad -(p(x)\, u_x)_x + q(x)\, u + k(x)\{r_1 u_{yy} + r_2 u_y + r_3 u\} = 0$$

ist.

§ 2. Die zulässige Bedingung $\int_l^m |u(x, y)|^2 k(x)\, dx < \infty$.

Jetzt sollen die im Abschnitt I, § 1 unter den Voraussetzungen (II) als zulässig erkannten Randbedingungen durch die Forderung $\int_l^m |u(x, y)|^2 k(x)\, dx < \infty$ ergänzt werden. Diese Betrachtungen von S. 342 sollen hier durch einen Existenzsatz gerechtfertigt werden.

Hilfssatz 1. (M. H. STONE [13], S. 142–143): *Es sei A in $\mathfrak{A}$ ein wesentlich selbstadjungierter Operator und $\mu \neq 0$ ($\lambda = \varphi + i\mu$), dann existiert A_λ^{-1} und ist ein beschränkter, linearer Operator, der der Ungleichung $\|A_\lambda^{-1} j\|^2 \leq \frac{\|j\|^2}{|\mu|^2}$ für jedes $j \in \mathfrak{A}_\lambda^{-1}$ genügt.*

Beweis. Es ist $\lambda \in R(\lambda)$. Daher existiert A_λ^{-1}. Ist $j \in \mathfrak{A}_\lambda^{-1}$, so ist $A_\lambda^{-1} j \in \mathfrak{A}$ und es ist

$$(A A_\lambda^{-1} j,\ A_\lambda^{-1} j) = (A_\lambda^{-1} j,\ A A_\lambda^{-1} j).$$

Nun ist

$$A A_\lambda^{-1} j = A v = \lambda v + j = j + \lambda A_\lambda^{-1} j,$$

also:

$$(j + \lambda A_\lambda^{-1} j,\ A_\lambda^{-1} j) = (A_\lambda^{-1} j,\ j + \lambda A_\lambda^{-1} j),$$

$$(\bar{\lambda} - \lambda)\, \| A_\lambda^{-1} j \|^2 = (A_\lambda^{-1} j, j) - (j, A_\lambda^{-1} j),$$

$$2 |\mu|\, \| A_\lambda^{-1} j \|^2 \leq 2 \| j \|\, \| A_\lambda^{-1} j \|,$$

$$\| A_\lambda^{-1} j \|^2 \leq \frac{\| j \|^2}{|\mu|^2}.$$

Hilfssatz 2. *Sei A in $\mathfrak{A}$ wesentlich selbstadjungiert und halbbeschränkt: $(v, Av) > a(v,v)$. Ferner: $\varphi \leq 0$, $\varphi \leq a$. Dann existiert A_λ^{-1} und es ist*

$$\| A_\lambda^{-1} j \|^2 \leq \frac{\| j \|^2}{|\lambda|^2 - 2\varphi a}, \qquad \text{wenn } |\lambda|^2 - 2\varphi a > 0 \text{ ist.}$$

Beweis. Es ist $\lambda \in R(\lambda)$. Man hat

$$\begin{aligned} (j, j) &= (Av - \lambda v, Av - \lambda v) \\ &= (Av, Av) - 2\varphi (v, Av) + |\lambda|^2 (v, v) \\ &\geq (|\lambda|^2 - 2\varphi a)\, (v, v). \end{aligned}$$

Setzt man nun $v = A_\lambda^{-1} j$, so folgt die Behauptung.

Wir übertragen diese Abschätzungen auf unser $A_s^{-1} j$ und untersuchen sie in einer geeigneten rechten Halbebene: $\xi > \xi_0 > 0$ der s-Ebene. $\mu \neq 0$ in Hilfssatz 1 ist nach (11) erfüllt, wenn $\eta \neq 0$ in der $s = \xi + i\eta$-Ebene ist. Wir haben daher

$$\| A_s^{-1} j \|^2 \leq \frac{\| j \|^2}{\eta^2 (r_2 + 2\xi r_1)^2} \quad \text{für} \quad \xi > \xi_0 > 0, \quad \eta \neq 0. \tag{30}$$

Es ist nach (11) $\varphi = -(r_1 \xi^2 - r_1 \eta^2 + r_2 \xi + r_3)$. Beschränken wir η auf das Intervall $-\varepsilon \leq \eta \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ und hinreichend klein, so folgt für alle $\xi > \xi_0$ $\varphi \leq 0$ und $\leq a$ und überdies

$$\begin{cases} |\lambda|^2 - 2\varphi a = (r_1 \xi^2 - r_1 \eta^2 + r_2 \xi + r_3)^2 + \eta^2 (r_2 + 2\xi r_1)^2 \\ \qquad\qquad + 2a (r_1 \xi^2 - r_1 \eta^2 + r_2 \xi + r_3) \equiv \varrho(\xi, \eta) > 0 \end{cases} \tag{31}$$

für passende Wahl von ξ_0. Es ist daher für $-\varepsilon \leq \eta \leq \varepsilon$, $\xi > \xi_0 > 0$ nach Hilfssatz 2

$$\| A_s^{-1} j \|^2 \leq \frac{\| j \|^2}{\varrho(\xi, \eta)}. \tag{32}$$

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen (II) und (III) sei die homogene Differentialgleichung (I) $(f(x, y) \equiv 0)$ vorgegeben. Bei $x = l$, $x = m$ liege der Grenzpunktfall vor. In den Anfangsbedingungen (4) sei $u_0(x)$, $u_1(x)$ zweimal stetig*

differenzierbar in $l<x<m$ *und es sei* $\|u_0\|^2$, $\|u_1\|^2$, $\|Au_0\|^2$, $\|Au_1\|^2<\infty$. *Dann ist* $\int_l^m |u(x,y)|^2 k(x)\,dx<\infty$ *für jedes* y *aus* $0\leq y\leq y_0<\infty$, *wobei* $u(x,y)$ *durch* (20)

$$u(x,y)=u_0(x)+u_1(x)\,y+\frac{1}{2\pi}e^{\xi_1 y}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\eta y}w(x,\xi_1+i\eta)\,d\eta \tag{33}$$

gegeben ist.

Bemerkung. Die Voraussetzungen sind hier wesentlich schwächere als in Satz 1. Da die Abschätzungen (14), (15) nicht benötigt werden, genügt es, diese in Satz 1 nur für ein abgeschlossenes Intervall zu fordern[11]).

Beweis. Mit leichten Abschätzungen wird für $0\leq y\leq y_0<\infty$

$$\left\{\begin{aligned}&\int_l^m |u(x,y)|^2 k(x)\,dx\\&\leq 3\left\{\|u_0\|^2+\|u_1\|^2 y_0^2+\frac{e^{2\xi_1 y_0}}{4\pi^2}\int_l^m\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\eta y}w(x,\xi_1+i\eta)\,d\eta\right|^2 k(x)\,dx\right\}.\end{aligned}\right. \tag{34}$$

Nun ist nach (19) $w(x,s)=-\frac{1}{s}A_s^{-1}z$. Man hat

$$\left\{\begin{aligned}&\int_l^m\left|\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\eta y}w(x,\xi_1+i\eta)\,d\eta\right|^2 k(x)\,dx\\&\qquad\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{\xi_1^2+\eta^2}\int_l^m\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|A_{\xi_1-i\eta}^{-1}z|^2\,d\eta\right)k(x)\,dx\end{aligned}\right. \tag{35}$$

mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung. Die Existenz von $\int_l^m |A_{\xi_1-i\eta}^{-1}z|^2 k(x)\,dx$ folgt aus unseren Hilfssätzen. Zunächst ist mit (19)

$$\|z(x,\xi_1+i\eta)\|^2\leq M,$$

$$M=4\left\{\|Au_0\|^2+\frac{1}{\xi_1^2}\|Au_1\|^2+r_3^2\|u_0\|^2+2\left(r_2^2+\frac{r_3^2}{\xi_1^2}\right)\|u_1\|^2\right\}. \tag{36}$$

Wir schätzen nun $\varrho(\xi_1,\eta)$ aus (31) ab. Dabei sei stets η auf das Intervall $-\varepsilon\leq\eta\leq+\varepsilon$ beschränkt. Ist $a>0$, so wird

$$\varrho(\xi_1,\eta)\geq 2a(r_1\xi_1^2-r_1\eta^2+r_2\xi_1+r_3)=\alpha^2-\beta^2\eta^2$$

mit $2a(r_1\xi_1^2+r_2\xi_1+r_3)=\alpha^2$, $2a\,r_1=\beta^2$. Dabei ist α^2 gewiß positiv, wenn nur ξ_1 hinreichend groß gewählt ist. Ist $a=0$, so wird

$$\varrho(\xi_1,\eta)\geq(r_1\xi_1^2-r_1\eta^2+r_2\xi_1+r_3)^2\geq(r_1\xi_1^2-r_1\eta^2+r_2\xi_1+r_3)=\alpha^2-\beta^2\eta^2$$

mit $\alpha^2=r_1\xi_1^2+r_2\xi_1+r_3$, $\beta^2=r_1$ für hinreichend großes ξ_1. Für $a<0$ erhält man $\varrho(\xi_1,\eta)\geq(\gamma_1^2-\delta_1^2\eta^2)^2-\gamma_2^2+\delta_2^2\eta^2$ mit

$$\gamma_1^2=r_1\xi_1^2+r_2\xi_1+r_3,\quad \delta_1^2=r_1,\quad \gamma_2^2=-2a(r_1\xi_1^2+r_2\xi_1+r_3),\quad \delta_2^2=-2a\,r_1.$$

Indem wir ϱ weiter abschätzen folgt:

$$\varrho(\xi_1, \eta) \geqq \gamma_1^4 - 2\gamma_1^2 \delta_1^2 \eta^2 - \gamma_2^2.$$

Nun ist $\gamma_1^4 - \gamma_2^2 = \alpha^2$ für hinreichend großes ξ_1 eine positive Größe. Wir setzen $\beta^2 = 2\gamma_1^2 \delta_1^2$ und erhalten für alle a $\varrho(\xi_1, \eta) \geqq \alpha^2 - \beta^2 \eta^2$. Dabei ist ε so klein zu wählen, daß $\frac{\beta}{\alpha} \varepsilon \leqq p < 1$ ist. Mit (30) und (32) erhalten wir daher

$$\int_l^m |A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx \leqq \begin{cases} \dfrac{M}{\alpha^2 - \beta^2 \eta^2} \leqq \dfrac{M}{\alpha^2 - \beta^2 \varepsilon^2} & \text{für} \quad -\varepsilon \leqq \eta \leqq \varepsilon \\ \dfrac{M}{\eta^2 (r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \leqq \dfrac{M}{\varepsilon^2 (r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} & \text{für} \quad \begin{cases} -\infty < \eta \leqq -\varepsilon, \\ \varepsilon \leqq \eta < +\infty. \end{cases} \end{cases}$$

Damit ist die Existenz nachgewiesen. Wir zeigen nun, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z \|^2 \, d\eta \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_l^m |A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx \right) d\eta \tag{37}$$

ebenfalls existiert. Wir zerlegen das Integral (37) in $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}$ und erhalten mit (30), (32) und unseren Abschätzungen für $\varrho(\xi_1, \eta)$ und $\|z\|^2$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \| A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z \|^2 \, d\eta \leqq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{M}{\alpha^2 - \beta^2 \eta^2} \, d\eta \leqq \frac{2M\varepsilon}{\alpha^2 - \beta^2 \varepsilon^2} \quad \text{für} \quad \frac{\beta}{\alpha} \varepsilon \leqq p < 1,$$

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \| A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z \|^2 \, d\eta \leqq \frac{M}{(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{M}{(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \frac{1}{\varepsilon},$$

$$\int_{+\varepsilon}^{+\infty} \| A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z \|^2 \, d\eta \leqq \frac{M}{(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{M}{(r_2 + 2\xi_1 r_1)^2} \frac{1}{\varepsilon}.$$

Aus der Existenz von

$$\int_l^m |A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_l^m |A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx \right) d\eta$$

als Lebesguesche Integrale folgt nach dem Satz von Fubini, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_l^m |A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z|^2 k(x)\, dx \right) d\eta = \int_l^m \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |A_{\xi_1 + i\eta}^{-1} z|^2 \, d\eta \right) k(x)\, dx$$

ist. Mit der Existenz des letzten Integrals ist unser Satz bewiesen, wie die Gln. (34) und (35) zeigen.

§ 3. Die inhomogene Differentialgleichung.

Jetzt sei in unserer Ausgangsdifferentialgleichung (1) $f(x, y) \not\equiv 0$.

Satz 3. *Es werde* (1) *unter den Voraussetzungen* (*II*) *und* (*III*) *betrachtet. Bei* $x = l$, $x = m$ *liege der Grenzpunktfall vor. Die Anfangsbedingungen* (4) *sind*

$u_0(x) \equiv 0$, $u_1(x) \equiv 0$. *Die Funktionen* $f(x, y)$, $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ *seien in* $l < x < m$, $0 \leqq y < \infty$ *stetig, die Integrale*

$$(38) \qquad \int_0^\infty |f(x, y)|\, dy, \qquad \int_0^\infty e^{-\xi_0 y} |f_y(x, y)|\, dy, \qquad \int_0^\infty e^{-\xi_0 y} |f_{yy}(x, y)|\, dy$$

in $l < x < m$ *gleichmäßig konvergent in* x. *Ferner sei*

$$(39) \qquad \|f(x, 0)\|^2, \quad \|f_x(x, 0)\|^2, \quad \|f_y(x, 0)\|^2, \quad \left\| \int_0^\infty e^{-\xi_0 y} |f_{yy}(x, y)|\, dy \right\|^2 < \infty .$$

Bestehen die Abschätzungen (14) *und* (15), *so ist fast überall*

$$(40) \qquad \tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy} (A_s^{-1} g)\, ds \qquad \text{mit} \qquad g(x, s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(x, y)\, dy$$

eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1).

$\xi_1 > \xi_0$ ist so gewählt, daß die Abschätzungen (14), (15) für $|s| > R_0$ in der rechten Halbebene $\xi > \xi_0 > 0$ gelten.

Bemerkung. Sind die obigen Voraussetzungen für $f(x, y)$ nicht erfüllt, so bleibt die Lösung (40) in $0 \leqq y \leqq y_1 < \infty$ weiterhin bestehen, wenn man $f(x, y)$ abschneidet, d.h. $f(x, y) = 0$ für $y > y_1$ setzt.

Beweis. Unter der Voraussetzung (38) ist $|g(x, s)| < \int_0^\infty |f(x, y)|\, dy$, wobei das Integral gleichmäßig in x konvergiert. Daher ist $g(x, s)$ für $\xi > 0$ analytisch in $s = \xi + i\eta$ und stetig in x. Durch partielle Integration haben wir

$$(41) \qquad g(x, s) = \frac{1}{s} f(x, 0) + \frac{1}{s^2} f_y(x, 0) + \frac{1}{s^2} \int_0^\infty e^{-sy} f_{yy}(x, y)\, dy .$$

In Analogie zu (19) führen wir die Abkürzungen

$$(42) \qquad \tilde{v}(x, s) = \frac{1}{s} A_s^{-1} \tilde{z} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{z}(x, s) = f(x, 0) + \frac{1}{s} f_y(x, 0) + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sy} f_{yy}\, dy$$

ein. Schreiben wir (42) in der Form

$$\tilde{v}(x, s) = \frac{1}{s} A_s^{-1} f|_{y=0} + \frac{1}{s^2} A_s^{-1} f_y|_{y=0} + \frac{1}{s^2} A_s^{-1} \left(\int_0^\infty e^{-sy} f_{yy}\, dy \right),$$

so sind wegen $\|f(x, 0)\|^2 < \infty$ usw. die Voraussetzungen für die Ungleichungen (14) erfüllt. Daher konvergiert (40) gleichmäßig in $l < x < m$ und $0 \leqq y \leqq y_0 < \infty$. Insbesondere ist

$$(43) \qquad \lim_{y \to 0} \tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} (A_s^{-1} g)\, ds = 0 ,$$

wie die Anwendung des Cauchyschen Satzes (vgl. S. 346) zeigt, da $A_s^{-1}g$ für $\xi > \xi_0$ analytisch in s ist. Betrachten wir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} s\, e^{sy}\,\tilde{v}(x,s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{sy}\left\{A_s^{-1}f|_{y=0} + \frac{1}{s}\,A_s^{-1}f_y|_{y=0} + \cdots\right\}ds,$$

so können wir bei $A_s^{-1}f|_{y=0}$ wegen $||f_x(x,0)||^2 < \infty$ von der schärferen Ungleichung (15) Gebrauch machen. Mithin konvergiert dieses Integral in $l<x<m$, $0 \leqq y \leqq y_0 < \infty$ gleichmäßig und wir haben

$$\tilde{u}_y(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} s\, e^{sy}(A_s^{-1}g)\,ds \quad \text{mit} \quad \lim_{y\to 0}\tilde{u}_y(x,y) = 0. \tag{44}$$

Damit sind auch die Anfangsbedingungen von $\tilde{u}$ erfüllt. Analoge Darstellung folgt für $\tilde{u}_x(x,y)$. Wir zeigen nun, daß (40) die integrierte Gl. (1) erfüllt. Mit $l<n<m$ erhalten wir

$$\int_n^x\int_0^y D[u]\,dx\,dy = \int_n^x\int_0^y k(x)\,f(x,y)\,dx\,dy. \tag{45}$$

Setzen wir $\tilde{v}(x,s) = A_s^{-1}g$, so ist:

$$\left\{\begin{aligned}
&\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} e^{sy}\,\tilde{v}(x,s)\,ds,\\
&\int_0^y \tilde{u}(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\,\tilde{v}(x,s)\,ds,\\
&\int_0^y \tilde{u}_x(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\,\tilde{v}'(x,s)\,ds,\\
&\lim_{y\to 0}\tilde{u}(x,y) = 0, \quad \lim_{y\to 0}\tilde{u}_y(x,y) = 0.
\end{aligned}\right. \tag{46}$$

Indem wir analog zu (21) die linke Seite in (45) weiter ausrechnen und von (46) Gebrauch machen, folgt

$$\left\{\begin{aligned}
\int_n^x\int_0^y D[\tilde{u}]\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} \frac{e^{sy}}{s}\Big\{&-p(x)\,\tilde{v}' + (p(x)\,\tilde{v}')|_{x=n} +\\
&+\int_n^x \big(k(x)\,(r_1 s^2 + r_2 s + r_3) + q(x)\big)\,\tilde{v}\,dx\Big\}ds.
\end{aligned}\right. \tag{47}$$

Nun genügt $\tilde{v}$ der Gleichung $B\,\tilde{v} + k(x)\{r_1 s^2 + r_2 s + r_3\}\,\tilde{v} = k(x)\,g(x,s)$. Indem wir diese nach x integrieren und in (47) berücksichtigen, so erkennen wir,

daß für $u=\tilde{u}$ die integrierte Gl. (45) erfüllt ist, wenn

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,\frac{e^{sy}}{s}\int_n^x k(x)\,g(x,s)\,dx=\int_n^x\int_0^y k(x)\,f(x,y)\,dx\,dy \tag{48}$$

ist. Man zeigt dies mit W. MÄCHLER so: Zunächst ist

$$\int_n^x d\tau\,k(\tau)\int_0^\infty |f(\tau,y)|\,dy=\int_0^\infty dy\int_n^x k(\tau)\,|f(\tau,y)|\,d\tau,$$

da $\int_0^\infty |f(x,y)|\,dy$ in $l<x<m$ gleichmäßig konvergiert. Ferner wird

$$\left|\int_0^\infty dy\,e^{-sy}\int_0^y dt\int_n^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau\right| \leqq \lim_{A\to\infty}\int_0^A dy\,e^{-\xi y}\int_0^y dt\int_n^x k(\tau)\,|f(\tau,t)|\,d\tau$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left\{-\frac{e^{-\xi y}}{\xi}\int_0^y dt\int_n^x k(\tau)\,|f(\tau,t)|\,d\tau\Bigg|_{y=0}^{y=A}+\frac{1}{\xi}\int_0^A dy\,e^{-\xi y}\int_n^x k(\tau)\,|f(\tau,y)|\,d\tau\right\}$$

$$=\frac{1}{\xi}\int_0^\infty dy\,e^{-\xi y}\int_n^x k(\tau)\,|f(\tau,y)|\,d\tau\leqq\frac{1}{\xi}\int_0^\infty dy\int_n^x k(\tau)\,|f(\tau,y)|\,d\tau<\infty$$

für Realteil $s=\xi>0$. Wir haben daher

$$\int_0^\infty dy\,e^{-sy}\int_0^y dt\int_n^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau=\frac{1}{s}\int_0^\infty dy\,e^{-sy}\int_n^x k(\tau)\,f(\tau,y)\,d\tau.$$

Die Konvergenz ist eine absolute in der Halbebene $\xi>0$. Die letzte Gleichung wird nun mit $\frac{e^{sy}}{2\pi i}$ multipliziert und über $\xi_1-i\infty$ bis $\xi_1+i\infty$ integriert:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,e^{sy}\int_0^\infty dz\,e^{-sz}\int_0^z dt\int_n^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,\frac{e^{sy}}{s}\int_0^\infty dt\,e^{-st}\int_n^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau.$$

Nach unserer Bezeichnung aus I, § 1 steht links $L^{-1}L\int_0^z dt\int_n^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau$. Wir haben unter unseren Voraussetzungen:

$$\int_0^y dt\int_n^x k(\tau)\,f(\tau,t)\,d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,\frac{e^{sy}}{s}\int_n^x d\tau\int_0^\infty e^{-st}\,k(\tau)\,f(\tau,t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\xi_1-i\infty}^{\xi_1+i\infty} ds\,\frac{e^{sy}}{s}\int_n^x k(\tau)\,g(\tau,s)\,d\tau.$$

Damit ist gezeigt, daß $\tilde{u}$ die integrierte Gl. (45) befriedigt. Durch Differentiation folgt:

$$\left(\left(-\int_0^y p(x)\,\tilde{u}_x\,dy\right)_x + r_1 k(x)\,\tilde{u}_y\right)_y + q(x)\,\tilde{u} + k(x)\{r_2\,\tilde{u}_y + r_3\,\tilde{u}\} = k(x)\,f(x,y),$$

$$\left(-p(x)\,\tilde{u}_x + r_1\left(\int_n^x k(x)\,\tilde{u}_y\,dx\right)_y\right)_x + q(x)\,\tilde{u} + k(x)\{r_2\,\tilde{u}_y + r_3\,\tilde{u}\} = k(x)\,f(x,y),$$

und wie im § 1 erschließt man daraus, daß $\tilde{u}$ fast überall eine Lösung von (1) ist.

§ 4. Die zulässige Bedingung $\int_l^m |\tilde{u}(x,y)|^2 k(x)\,dx < \infty$.

Satz 4. *Wir betrachten* (1) *unter den Voraussetzungen* (*II*) *und* (*III*). *Bei* $x=l$, $x=m$ *liege der Grenzpunktfall vor. Die Anfangswerte und die Voraussetzungen über* $f(x,y)$ *seien dieselben wie in Satz 3. Dann ist* $\int_l^m |\tilde{u}(x,y)|^2 k(x)\,dx < \infty$ *für jedes* y *aus* $0 \leqq y \leqq y_0 < \infty$, *wobei* $\tilde{u}(x,y)$ *durch* (40)

$$\tilde{u}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{\xi_1 y} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\eta y} (A^{-1}_{\xi_1 + i\eta} g)\,d\eta$$

gegeben ist.

Beweis. Vergleiche die Bemerkungen zu Satz 3 und 2, die auch hier gültig bleiben. Die Bezeichnungen sind im Beweis zu Satz 3 so gewählt, daß der Beweis von Satz 2 hier unmittelbar übertragen werden kann.

Eine Zusammenfassung der §§ 1 bis 4 zeigt, daß durch

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} e^{sy} A_s^{-1}(h+g)\,ds = u_0(x) + u_1(x)\,y -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi_1 - i\infty}^{\xi_1 + i\infty} \frac{e^{sy}}{s} A_s^{-1}\left(A u_0 + \frac{1}{s} A u_1 + r_3 u_0 + \left(r_2 + \frac{r_3}{s}\right) u_1 - s\,g\right) ds$$

eine Lösung von (1) unter den gestellten Anfangsbedingungen und der Bedingung $\int_l^m |u(x,y)|^2 k(x)\,dx < \infty$ gegeben wird, wenn für $x=l$, $x=m$ der Grenzpunktfall vorliegt.

Anhang: Eine Bemerkung über die Rellichschen Anfangszahlen.

Wir behalten die Bezeichnungen von I, § 2 bei und beweisen den

Satz: $-(p(x)\,v')' + q(x)\,v = \lambda\,k(x)\,v$ *werde unter den Voraussetzungen* (*IV*) *betrachtet. Die Gesamtheit der bei* $x=0$ *zu stellenden* Weyl-Stoneschen *Randbedingungen* $[\alpha, v]_0 = 0$ *geht dann und nur dann in die Gesamtheit der* Sturm-Liouvilleschen *Randbedingungen* $v(0)\cos\delta + v'(0)\sin\delta = 0$ $(0 \leqq \delta < \pi)$ *über, wenn* $\sigma = q_0 = q_1 = 0$ *ist.*

Beweis. Ein Fundamentalsystem unserer Gleichung hat die Form

$$\omega(x) = x^{\varrho_1}(\omega_0 + \omega_1 x + \cdots), \qquad \omega_0 = 1,$$
$$\psi(x) = x^{\varrho_2}(\psi_0 + \psi_1 x + \cdots) + c\,\omega(x)\log x,$$

mit $\psi_0 = 1$, $c = 0$ wenn $\varrho_1 - \varrho_2$ nicht ganz; $\psi_0 = 0$, $c = 1$ wenn $\varrho_1 - \varrho_2 = 0$; $\psi_0 = 1$, $\psi_n = 0$ wenn n ganz positiv ist. Mit den Abkürzungen $\Omega_{\nu_0}(x) = x^{\varrho_1}(\omega_0 + \cdots \omega_{\nu_0-1} x^{\nu_0-1})$, $\Psi_{\nu_0}(x) = x^{\varrho_2}(\psi_0 + \cdots \psi_{\nu_0-1} x^{\nu_0-1}) + c\,\Omega_{\nu_0}(x)\log x$ gehen die Randbedingungen $[\alpha, v]_0 = 0$ nach [10] in (13) über mit

$$v_0 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x)}{x^{\varrho_2}}, \qquad v_1 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x) - v_0 \Psi_{\nu_0}(x)}{x^{\varrho_1}} \quad \text{für} \quad \varrho_1 \neq \varrho_2 \quad \text{und reell,}$$

$$v_0 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x)}{x^{\varrho_1}\log x}, \qquad v_1 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x) - v_0 \Psi_{\nu_0}(x)}{x^{\varrho_1}} \quad \text{für} \quad \varrho_1 = \varrho_2.$$

Hinreichend: Man hat $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$, also $v_0 = v(0)$. Weiter ergibt sich $k_0 = k_1 = 0$, da doch $\nu_0 > 1$ sein muß. c bestimmt sich aus der Gleichung $\lambda k_1 - q_1 + c\,p_0 = 0$. Also $c = 0$. Nun ist $\Psi_{\nu_0}(x) = 1 + \widetilde{\Psi}_{\nu_0}(x)$ mit $\widetilde{\Psi}_{\nu_0}(x) = \psi_2 x^2 + \cdots \psi_{\nu_0-1} x^{\nu_0-1}$. Daher wird

$$v_1 = \lim_{x\to 0} \frac{v(x) - v(0)}{x} - \lim_{x\to 0} v(0)\,\frac{\widetilde{\Psi}_{\nu_0}(x)}{x} = v'(0).$$

Notwendig: Ersichtlich ist $\varrho_1 = \varrho_2$ auszuschließen. Wenn $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ist, dann muß $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 0$ sein. Aus (12) folgt $\sigma = q_0 = 0$, da doch $k_0 = k_1 = 0$ ist, weil bei $x = 0$ der Grenzkreisfall vorliegt. Wir haben $v_0 = v(0)$. Die Forderung $v_1 = v'(0)$ bedingt $\lim_{x\to 0} \frac{\Psi_{\nu_0}(x) - 1}{x} = 0$. Dies ist genau dann erfüllbar, wenn $c = 0$ ist und dies tritt genau dann ein, wenn $q_1 = 0$ ist. Bei Beachtung von (13) ist unser Satz bewiesen.

Schlußbemerkung.

Ist unter den Voraussetzungen (II) und (III) $\int_l^m \left|\frac{k(x)}{p(x)}\right| dx = \infty$, so liegt bei $x = l$ der Grenzpunktfall vor ([11] S. 353). Ist $x = l$ parabolischer Rand und Einhüllende der Charakteristiken, so werden wir also im allgemeinen mit dem Vorliegen des Grenzpunktfalles auf $x = l$ rechnen müssen. Wir wissen bereits (Abschnitt I, § 2), daß bezüglich der Stellbarkeit der einfachen Randbedingung (5), heuristisch gesprochen, ein parabolischer Rand und Träger der charakteristischen Spitzen einem hyperbolischen Rand unter den Voraussetzungen (I) wesentlich näher steht, als ein parabolischer Rand und Einhüllende der Charakteristiken. Sind die Koeffizienten in (1) konstant, $m = +\infty$, so ist Voraussetzung (III) erfüllt und nach dem obigen RELLICHschen Kriterium liegt bei $x = m$ der Grenzpunktfall vor. Eine Durchsicht derjenigen Probleme der mathematischen Physik, in denen die Randbedingung $u \to 0$ für $x \to +\infty$ gestellt wird, zeigt, daß vom mathematischen Stand-

punkt nicht ein physikalischer Sachverhalt, sondern das Vorliegen des Grenzpunktfalles für die Bedingung $\int_l^m |u(x, y)|^2 k(x)\, dx < \infty$ verantwortlich ist.

Existenzsätze für den Grenzkreisfall, sowie der Nachweis, daß weite Klassen von Problemen die Abschätzungen (14) und (15) erfüllen, sollen später gegeben werden.

Literatur.

[1] Bromwich, T. J. I'A.: An introduction to the theory of infinite series, 2. Aufl., S. 504. London 1926. — [2] Churchill, R. V.: The solution of linear boundary-value problems in physics by mean of the Laplace-Transformation. Part I: A theory for establishing a solution in the form of an integral, for problems with vanishing initial conditions. Math. Ann. **114**, 591—613 (1937). — [3] Churchill, R. V.: Modern operational mathematics in engineering. New York 1944. — [4] Courant, R., u. D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, Bd. II, S. 202—222. Berlin 1937. — [5] Doetsch, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937. — [6] Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Bd. I: Theorie der Laplace-Transformation. Basel 1950. — [7] Friedrichs, K.: Über die ausgezeichnete Randbedingung in der Spektraltheorie der halbbeschränkten gewöhnlichen Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **112**, 1—23 (1935). — [8] Mächler, W.: Laplacesche Integraltransformation und Integration partieller Differentialgleichungen vom hyperbolischen und parabolischen Typus. Comm. Math. Helv. **5**, 256—304 (1933). — [9] Plancherel, M.: Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel. Proc. London Math. Soc. (2) **24** (1925). — [10] Rellich, F.: Die zulässigen Randbedingungen bei den singulären Eigenwertproblemen der mathematischen Physik. (Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung.) Math. Z. **49**, 702—723 (1943/44). — [11] Rellich, F.: Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. Math. Ann. **122**, 343—368 (1950/51). — [12] Riesz, F., u. B. Sz. Nagy: Lecons d'analyse fonctionelle. Budapest 1952. — [13] Stone, M. H.: Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. New York 1932. — [14] Tamarkin, J.: Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations etc. Math. Z. **27**, 1—54 (1927). — [15] Weyl, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. **68**, 220—269 (1909). — [16] Bergmann, S.: On solutions of linear partial differential equations of mixed type. Amer. J. Math. **74**, 444—474 (1952). — [17] Bers, L.: On the continuation of a potential gas flow across the sonic line. N. A. C. A. Technical Note No. 2058. 1950. — [18] Germain, P., et R. Bader: Sur quelques problèmes aux limites singuliers pour une équation hyperbolique. C. R. Acad. Sci., Paris **231**, 268 (1950). — [19] Protter, M. H.: A boundary value problem for an equation of mixed type. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 416—429 (1951). — [20] Feller, W.: The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. Ann. of Math. **55**, 468—519 (1952).

Berlin-Charlottenburg, Mathematisches Institut der Technischen Universität.

(Eingegangen am 20. Dezember 1952.)

Barthel, W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 358—375 (1953)

Zum Inhaltsbegriff in der Minkowskischen Geometrie.

Von
Woldemar Barthel.

In der vorliegenden Arbeit soll eine wesentlich auf dem Inhaltbegriff begründete Geometrie der Minkowskischen Räume untersucht werden. Hierzu ist nötig, zuerst eine geeignete Inhaltsdefinition zu geben. Da die Geometrie im Mittelpunkt unserer Betrachtungen steht, gehen wir auf maßtheoretische Gesichtspunkte nicht näher ein.

Nachdem man sich lange vergeblich um eine Inhaltsdefinition in Minkowskischen Räumen bemüht hatte, führte als erster Busemann eine systematische Behandlung dieses Problems durch (vgl. [2], [4] und [5]). Er löste es in folgender Weise: M sei ein Stück einer p-dimensionalen Ebene V_p des Minkowskischen Raumes. In einem zugeordneten euklidischen Raum bezeichne $|M|_p^E$ den p-dimensionalen euklidischen Inhalt von M. Weiter sei $U(V_p)$ die Menge, in welcher V_p die volle Minkowskische Einheitskugel schneidet, deren Mittelpunkt auf V_p liegt. Setzt man dann

$$\sigma(V_p) = \frac{\omega^{(p)}}{|U(V_p)|_p^E}, \qquad \text{wo} \qquad \omega^{(p)} = \frac{\pi^{p/2}}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)},$$

so wird der p-dimensionale Minkowskische Inhalt von M durch

$$|M|_p = \sigma(V_p)\,|M|_p^E$$

erklärt. Mit anderen Worten, der Minkowskische Inhalt ist dem euklidischen proportional, wobei als Faktor das Verhältnis der euklidischen Inhalte der euklidischen und Minkowskischen Einheitskugel in jener p-dimensionalen Ebene benutzt wird. Für den Minkowskischen Inhalt eines beliebigen p-dimensionalen Flächenstückes $x^i(u^1, \ldots, u^p)$ ergibt sich dann bei rechtwinkligen Koordinaten

$$\int \sigma(V_p(u)) \sqrt{\sum \left(\frac{\partial(x^{i_1} \ldots x^{i_p})}{\partial(u^1 \ldots u^p)}\right)^2}\, du^1 \ldots du^p.$$

Natürlich ist der Flächeninhalt unabhängig von der speziellen Wahl des assoziierten euklidischen Raumes.

An dieser Inhaltsdefinition ist verschiedentlich kritisiert worden, daß sie euklidische Hilfsmittel benutzt, welche in der Minkowskischen Problemstellung völlig fremd erscheinen. Außerdem ist man versucht einzuwenden, daß mit dieser Darstellung nicht gerechnet werden kann.

In unseren Untersuchungen soll nun eine andere Formulierung des Busemannschen Inhaltsbegriffes gegeben werden, die von einem euklidischen

Hintergrund frei ist und nützliche Rechenregeln abzuleiten gestattet. Von dieser Grundlage aus wird dann eine analytische Geometrie der Minkowskischen Räume entwickelt sowie die Krümmung von Kurven und Hyperflächen diskutiert. Dabei lassen wir uns von dem Grundgedanken leiten, daß man zu einer befriedigenden Darstellung der Minkowskischen Geometrie nur gelangen kann, wenn das *Inhalts*maß neben der *Längen*messung gleichberechtigt benutzt wird. Hierin unterscheiden sich diese Untersuchungen gegenüber den Arbeiten von Herrn Rund [7], in denen die Minkowskische Geometrie allein auf dem Längenmaß begründet wird. Jene Notwendigkeit, den Vorrang des Längenbegriffes vor der Inhaltsmessung aufzuheben, wird in den Finslerschen, d.h. lokal-Minkowskischen Räumen noch viel deutlicher zutage treten. Wir haben die Absicht, darüber in einer anderen Arbeit zu berichten.

1. Definition des Minkowskischen Raumes.

Ein *Minkowskischer Raum* $\mathfrak{M}_n$ ist ein n-dimensionaler affiner Raum, in dem zwei Punkte $a=(a^1, \ldots, a^n)$ und $b=(b^1, \ldots, b^n)$ den Abstand

$$L(b-a)$$

besitzen. Dabei setzen wir von der Funktion $L(X)=L(X^1, \ldots, X^n)$ folgende Eigenschaften voraus:

I. $L(X)>0$ für $X \neq 0$.
II. $L(X)=L(-X)$.
III. $L(\lambda X)=\lambda L(X)$ für $\lambda>0$.
IV. $L(X)+L(Y)>L(X+Y)$ für linear unabhängige Vektoren X, Y.
V. $L(X)$ ist dreimal stetig differenzierbar.

Geometrisch bedeutet dies, daß der Abstand stets positiv und von der Reihenfolge beider Punkte unabhängig ist, sowie daß das λ-fache eines Vektors auch die λ-fache Länge besitzt. Für eine glatte Kurve $x(t)$ erhalten wir mit dem üblichen Grenzprozeß die Länge

$$\int L(\dot{x})\,dt,$$

welche nach III von der Parameterwahl unabhängig ist. Die Dreiecksungleichung in der strengen Form hat zur Folge, daß zwischen zwei Punkten genau eine kürzeste Verbindung existiert, nämlich ihre geradlinige Verbindungsstrecke.

Wir nennen den Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt a konstanten Abstand r haben,

$$L(x-a)=r,$$

Minkowskische Kugel $\mathfrak{c}(a, r)$. Diese sind alle homothetisch und wegen der Dreiecksungleichung IV streng konvex. Als Einheitskugel $\mathfrak{c}_1=\mathfrak{c}(a, 1)$ tritt hier also die Indikatrix des von der Grundfunktion definierten Variationsproblems auf. Die Vollkugel

$$L(x-a) \leqq r$$

soll mit $\mathfrak{C}(a, r)$ bezeichnet werden.

2. Inhaltsdefinition im $\mathfrak{M}_n$.

Das erste Problem der Minkowskischen Geometrie ist die Definition des Volumens und Flächeninhaltes. Wir gehen dabei zunächst wie in der analytischen Geometrie des euklidischen Raumes vor (vgl. [8] § 10). Wird ein Parallelotop durch die Vektoren $A_1, \ldots, A_n$ aufgespannt, so besitze sein Rauminhalt $J(A_1, \ldots, A_n)$ die Eigenschaften:

I. $J(A_1, \ldots, A_n) \geqq 0$.

II. $J(A_1, \ldots, A_i + A_k, \ldots, A_n) = J(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$ für $i \neq k$.

III. $J(A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_n) = |\lambda| J(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$.

Nach einem bekannten Satz (s. [8] S. 124 und S. 118) existiert bis auf einen konstanten Faktor genau eine Funktion mit diesen drei Eigenschaften, nämlich

$$J(A_1, \ldots, A_n) = \mathfrak{F}^{(n)} |\| A_1 \ldots A_n \||, \qquad \mathfrak{F}^{(n)} \geqq 0.$$

Für das Volumen eines n-dimensionalen Gebietes $\mathfrak{G}$ erhalten wir mit dem üblichen Grenzprozeß bei positiver Orientierung des Integralelementes

$$J(\mathfrak{G}) = \mathfrak{F}^{(n)} \int_{\mathfrak{G}} dx^1 \ldots dx^n. \tag{2.1}$$

Die noch willkürliche Konstante $\mathfrak{F}^{(n)}$ bestimmen wir nun durch die weitere Forderung:

IV. Die n-dimensionale Einheitskugel $\mathfrak{C}_1$ besitzt in allen Minkowskischen Räumen dasselbe Volumen.

Da im n-dimensionalen euklidischen Raum das Volumen der Einheitskugel den Wert

$$\omega^{(n)} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

besitzt, besagt die vierte Eigenschaft

$$J(\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{F}^{(n)} \int_{L(X) \leq 1} dX^1 \ldots dX^n = \omega^{(n)}.$$

Damit ergibt sich für die festzulegende Konstante

$$\mathfrak{F}^{(n)} = \frac{\omega^{(n)}}{\int_{L(X) \leq 1} dX^1 \ldots dX^n}. \tag{2.2}$$

Nunmehr ist das Volumen in Minkowskischen Räumen durch die vier genannten Postulate eindeutig bestimmt.

Zur Definition des Flächeninhaltes schlagen wir folgenden Weg ein. Die Metrik des $\mathfrak{M}_n$ induziert in jeder p-Ebene

$$x^i = x^i_\varrho U^\varrho + a^i \qquad (\varrho = 1, \ldots, p;\ 0 < p < n)$$

die Minkowskische Maßbestimmung

$$\overline{L}(U^\varrho) = L(x^i_\varrho U^\varrho).$$

Die Kugeln dieses induzierten $\mathfrak{M}_p$ entstehen daher als Schnitt der p-Ebene mit jenen Kugeln des $\mathfrak{M}_n$, deren Mittelpunkt auf dieser Ebene liegt. Den Inhalt einer Ebene definieren wir nun durch das Prinzip, daß er eine *innere* Eigenschaft darstellen soll:

Der p-Flächeninhalt einer p-Ebene des $\mathfrak{M}_n$ sei gleich dem p-Volumen des in dieser Ebene induzierten $\mathfrak{M}_p$.

Natürlich wird jetzt der innerhalb der Ebene konstante Faktor $\sigma^{(p)} = F^{(p)}(x_\varrho^i)$ von der Ebenenstellung im $\mathfrak{M}_n$ abhängig. Wir erhalten also für ein Ebenenstück $\mathfrak{G}$ den Flächeninhalt

$$J^{(p)} = F^{(p)}(x_\varrho^i) \int_{\mathfrak{G}} du^1 \dots du^p$$

mit

$$F^{(p)}(x_\varrho^i) = \frac{\omega^{(p)}}{\int\limits_{L(x_\varrho^i U^\varrho) \leq 1} dU^1 \dots dU^p}. \tag{2.3}$$

Hier zeigt sich erst der wesentliche Kern der vierten Volumeneigenschaft, daß der Inhalt der Einheitskugel für *alle* $\mathfrak{M}_p$ eine (dimensionsabhängige) *Konstante* sein soll. Sie führt nämlich zu der entscheidenden Inhaltsfunktion $F^{(p)}(x_\varrho^i)$. Die besondere Wahl jener Konstanten ist ganz unwesentlich und sichert nur bei Spezialisierung auf euklidische Räume den Anschluß an die dort übliche Konvention.

Um den Inhalt einer beliebigen Fläche zu gewinnen, benutzen wir als zweites Prinzip:

Das Element des p-Inhaltes einer p-Fläche des $\mathfrak{M}_n$ sei in jedem Punkt gleich dem p-Inhaltselement der p-dimensionalen Minkowskischen Tangentialebene.

Die Fläche $x^i = x^i(u^\varrho)$ mit den Tangentialräumen

$$\dot{x}^i = x_\varrho^i(u)\dot{u}^\varrho, \quad \text{wo} \quad x_\varrho^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\varrho},$$

besitzt also den Inhalt

$$J^{(p)} = \int_{\mathfrak{G}} F^{(p)}\left(x_\varrho^i(u)\right) du^1 \dots du^p. \tag{2.4}$$

Nunmehr ist leicht zu sehen, daß diese Inhaltsdefinition für $p = 1$ mit der Minkowskischen Längenmessung identisch ist. Durch Integration ergibt sich nämlich wegen der Symmetrie der Indikatrix

$$\int\limits_{L(x_1^i U) \leq 1} dU = 2U \Big|_0^{\frac{U}{L(x_1^i U)}} = \frac{2}{L(x_1^i)},$$

also mit $\omega^{(1)} = 2$

$$J^{(1)} = \int L\left(x_1^i(u)\right) du.$$

Dies ist übrigens die einzige Stelle, an der die zweite Eigenschaft unserer Grundfunktion $L(X)$ wesentlich ist.

Ganz entsprechend, wie sich die Länge eines Vektors A und das Volumen eines Parallelotops $A_1, \ldots, A_n$ durch die Ausdrücke

$$J^{(1)} = F^{(1)}(A) = L(A)$$

bzw.

$$J^{(n)} = F^{(n)}(A_k) \equiv \mathfrak{F}^{(n)} |\| A_1 \ldots A_n \|\|$$

darstellt, läßt sich auch der p-Inhalt eines von $A_1, \ldots, A_p$ aufgespannten p-dimensionalen Parallelotops des $\mathfrak{M}_n$ berechnen:

$$J^{(p)} = F^{(p)}(A_\varrho).$$

Diese Funktion ist ursprünglich nur für linear unabhängige Kantenvektoren erklärt. Wir erweitern jedoch ihren Definitionsbereich auf linear abhängige A_ϱ, indem wir sie dort Null setzen.

Eigenschaften der Inhaltsfunktion. Die allgemeine Inhaltsfunktion $F^{(p)}(X_\varrho)$ besitzt eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften, die beim späteren Gebrauch unentbehrlich sind. Sie sollen jetzt abgeleitet werden.

I. $F^{(p)}(X_\varrho) > 0$ für linear unabhängige X_ϱ.

II. Bei affiner Transformation der Vektoren X_ϱ,

$$X_\varrho = X_{\varrho'} U_\varrho^{\varrho'} \quad \text{mit} \quad \Delta = \|U_\varrho^{\varrho'}\| \neq 0,$$

verhält sich $F^{(p)}(X_\varrho)$ wie eine p-Dichte vom Gewicht $+1$

$$F^{(p)\prime}(X_{\varrho'}) = |\Delta|^{-1} F^{(p)}(X_\varrho).$$

III. $F^{(p)}(\ldots X_\varrho \ldots X_\sigma \ldots) = F^{(p)}(\ldots X_\sigma \ldots X_\varrho \ldots)$.

IV. $F^{(p)}(\ldots X_\varrho + \lambda X_\sigma \ldots) = F^{(p)}(\ldots X_\varrho \ldots)$ für $\sigma \neq \varrho$.

V. $F^{(p)}(\ldots \lambda X_\varrho \ldots) = |\lambda| F^{(p)}(\ldots X_\varrho \ldots)$.

VI. $F^{(p)}(X_\varrho)$ ist ebenso oft stetig differenzierbar wie die Grundfunktion $L(X)$.

VII. $\dfrac{\partial F^{(p)}}{\partial X_\varrho^i} X_\sigma^i = F^{(p)} \delta_\sigma^\varrho$.

Die Positivität folgt aus der Definition (2.3), da dort auch der Nenner eine positive Größe ist.

Zur Bestimmung der Transformationsweise führen wir in (2.3) neue Integrationsvariable

$$U^{\varrho'} = U_\varrho^{\varrho'} U^\varrho$$

ein. Dann ist

$$X_{\varrho'} U^{\varrho'} = X_\varrho U^\varrho$$

und, weil das Integralelement stets positiv sein soll,

$$dU^{1'} \ldots dU^{p'} = |\Delta| \, dU^1 \ldots dU^p.$$

Wir erhalten also

$$\frac{\omega^{(p)}}{\int\limits_{L(X_{\varrho'} U^{\varrho'}) \leq 1} dU^{1'} \ldots dU^{p'}} = |\Delta|^{-1} \frac{\omega^{(p)}}{\int\limits_{L(X_\varrho U^\varrho) \leq 1} dU^1 \ldots dU^p}.$$

Die nächsten drei Eigenschaften sind einfache Folgen dieser Transformationsweise. Man braucht nur die Transformationen

$$X_\alpha = X_{\alpha'} \quad \text{für} \quad \alpha \neq \varrho, \sigma$$
$$X_\varrho = X_{\sigma'}$$
$$X_\sigma = X_{\varrho'}$$

oder

$$X_\alpha = X_{\alpha'} \quad \text{für} \quad \alpha \neq \varrho$$
$$X_\varrho = X_{\varrho'} + \lambda X_{\sigma'}$$

oder

$$X_\alpha = X_{\alpha'} \quad \text{für} \quad \alpha \neq \varrho$$
$$X_\varrho = \lambda X_{\varrho'}$$

durchzuführen, für die $|\Delta|$ jeweils 1, 1 und $|\lambda|$ beträgt.

Zum Nachweis der Differenzierbarkeit ist zunächst eine Umformung von

$$\int\limits_{L(X_\varrho U^\varrho)\leq 1} dU^1 \ldots dU^p$$

notwendig. Hat die Oberfläche der p-Indikatrix $L(X_\varrho U^\varrho) = 1$ die Parameterdarstellung

$$U^\alpha = U^\alpha(w^2, \ldots, w^p),$$

so können die Punkte der vollen p-Indikatrix $L(X_\varrho U^\varrho) \leq 1$ durch

$$U^\alpha = w^1 U^\alpha(w^2, \ldots, w^p) \quad \text{mit } 0 \leq w^1 \leq 1$$

dargestellt werden. Wegen

$$\frac{\partial(U^1, \ldots, U^p)}{\partial(w^1, \ldots, w^p)} = \left\| U^\alpha, w^1 \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2}, \ldots, w^1 \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^p} \right\|$$
$$= (w^1)^{p-1} \left\| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \ldots \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^p} \right\|$$

erhalten wir, wenn diese Determinante stets positiv gewählt wird,

$$\int\limits_{L\leq 1} dU^1 \ldots dU^p = \int\limits_{L\leq 1} (w^1)^{p-1} \left\| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \ldots \right\| dw^1 \ldots dw^p$$
$$= \oint\limits_{L=1} \frac{(w^1)^p}{p} \Big|_0^1 \left\| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \ldots \right\| dw^2 \ldots dw^p$$
$$= \frac{1}{p} \oint\limits_{L=1} \left| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \ldots \right| dw^2 \ldots dw^p.$$

Setzen wir im Integranden für U^α den Einheitsvektor $\frac{U^\alpha}{L(X_\varrho U^\varrho)}$, so können wir statt über die Indikatrixfläche über eine beliebige geschlossene Fläche $U^\alpha = U^\alpha(w^2, \ldots, w^p)$ integrieren, die von jedem Strahl durch $U^\alpha = 0$ nur einmal

getroffen wird. Dann erhalten wir nämlich

$$(2.5)\qquad \int\limits_{L(X_\varrho U^\varrho)\leq 1} dU^1 \dots dU^p = \frac{1}{p} \oint \frac{1}{L^p(X_\varrho U^\varrho)} \left| U^\alpha \frac{\partial U^\alpha}{\partial w^2} \dots \right| dw^2 \dots dw^p,$$

wobei das Integrationsgebiet des Randintegrals nicht mehr von den Variablen X_ϱ abhängt. Wir können daher die Differentiation mit der Randintegration vertauschen, womit die Eigenschaft VI bestätigt wird.

Aus Gl. IV folgt durch Differentiation nach λ, wenn nachträglich $\lambda = 0$ gesetzt wird,

$$\frac{\partial F^{(p)}}{\partial X_\varrho^i} X_\sigma^i = 0 \qquad (\varrho \neq \sigma).$$

Ebenso differenziert man Gl. V nach λ und setzt dann $\lambda = 1$,

$$\frac{\partial F^{(p)}}{\partial X_\varrho^i} X_\varrho^i = F^{(p)} \quad \text{(über } \varrho \text{ nicht summieren)}.$$

Beide Resultate zusammen ergeben aber gerade die Eigenschaft VII.

Die Oberflächenfunktion $f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)$. Führt man die zur Hyperebenenrichtung $x_1^i, \dots, x_{n-1}^i$ normale Vektordichte

$$(2.6)\qquad \mathfrak{p}_k = ||\delta_k^i\, x_1^i \dots x_{n-1}^i||$$

vom Gewicht (-1) ein, so läßt sich zeigen, daß $F^{(n-1)}(x_\varrho^i)$ nur eine Funktion der Unterdeterminanten $\mathfrak{p}_k$ der Matrix (x_ϱ^i) ist. Nehmen wir etwa die letzte Koordinate $\mathfrak{p}_n \neq 0$ an, so ergibt die Transformation

$$x_\varrho^i U^\varrho = -V^\mu \quad \text{für} \quad i = \mu = 1, \dots, n-1$$

wegen $\mathfrak{p}_i x_\alpha^i = 0$

$$x_\varrho^n U^\varrho = \frac{\mathfrak{p}_n x_\varrho^n U^\varrho}{\mathfrak{p}_n} = \frac{(\mathfrak{p}_i x_\varrho^i - \mathfrak{p}_\mu x_\varrho^\mu) U^\varrho}{\mathfrak{p}_n} = -\frac{\mathfrak{p}_\mu}{\mathfrak{p}_n} x_\varrho^\mu U^\varrho = \frac{\mathfrak{p}_\mu}{\mathfrak{p}_n} V^\mu$$

und

$$dV^1 \dots dV^{n-1} = |\mathfrak{p}_n|\, dU^1 \dots dU^{n-1}.$$

Hieraus folgt durch Einsetzen in die Definitionsgleichung (2.3) die gesuchte Umformung

$$(2.7)\qquad f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k) = F^{(n-1)}(x_1, \dots, x_{n-1}) = |\mathfrak{p}_n|\, F^{(n-1)}\begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \\ \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_n} & \dots & \frac{\mathfrak{p}_{n-1}}{\mathfrak{p}_n} \end{pmatrix}.$$

Man sieht sofort, daß diese Funktion in $\mathfrak{p}_k$ homogen ist

$$f^{(n-1)}(\lambda \mathfrak{p}_k) = |\lambda|\, f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k).$$

Auf die analoge Umformung der allgemeinen Inhaltsfunktion $F^{(p)}(X_\varrho)$ wollen wir hier nicht weiter eingehen.

3. Die Minkowskische Sinus-Funktion.

Nach Busemann führen wir eine Sinus-Funktion zwischen zwei linearen Vektorgebilden $A_1, \ldots, A_a$ und $B_1, \ldots, B_b$ des $\mathfrak{M}_n$ ein. Ihr d-dimensionaler Durchschnitt werde etwa von $A_1 = B_1, \ldots, A_d = B_d$ und ihre s-dimensionale Summe von $A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b$ aufgespannt, wobei

$$s + d = a + b, \qquad d \geqq 0 \tag{3.1}$$

ist (vgl. [8] S. 42). Dann definieren wir unter der Voraussetzung

$$\operatorname{Min}(a, b) = d + 1 \tag{3.2}$$

[1])

den Minkowskischen Sinus

$$Sm(A_\alpha, B_\beta) = \frac{F^{(d)}(A_1, \ldots, A_d)\, F^{(s)}(A_{d+1}, \ldots, A_a, B_1, \ldots, B_b)}{F^{(a)}(A_1, \ldots, A_a)\, F^{(b)}(B_1, \ldots, B_b)}. \tag{3.3}$$

Der nulldimensionale Inhalt des Nullvektors soll hierbei gleich 1 gesetzt werden. Natürlich ist diese Definition invariant gegen Transformationen der Basisvektoren aller auftretenden Vektorgebilde.

Unter der Sinus-Funktion zwischen einer a-Ebene und einer b-Ebene des $\mathfrak{M}_n$ verstehen wir den Sinus zwischen den sie aufspannenden linearen Vektorgebilden.

Man erkennt nun sofort die Eigenschaften:
$Sm(A_\alpha, B_\beta) \geqq 0$, wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn die Vektorgebilde linear abhängig sind.
$Sm(A_\alpha, B_\beta) = Sm(B_\beta, A_\alpha)$.

Normalität und Transversalität. Für zwei lineare Vektorgebilde soll unter der Voraussetzung, daß der Sinus erklärt ist, die Normalität definiert werden:

$A_1, \ldots, A_a$ heiße *normal* zu $B_1, \ldots, B_b$, oder $B_1, \ldots, B_b$ *transversal* zu $A_1, \ldots, A_a$, wenn

$$Sm(A^*_\alpha, B_\beta) \leqq Sm(A_\alpha, B_\beta)$$

für alle linearen Vektorgebilde A^*_α gilt, die mit B_β denselben Durchschnitt und dieselbe Summe wie A_α haben.

Zur Aufstellung einer Bedingung für das Maximum der Sinus-Funktion beachten wir, daß sie ihr Maximum in den A_α bei festem Durchschnitt im gegebenen Verbindungsraum genau dann annimmt, wenn

$$F^{(a)} = \operatorname{Min} \quad \text{und} \quad F^{(s)} = \text{const}.$$

[1]) Nur unter dieser Voraussetzung läßt sich im euklidischen Raum die relative Lage der beiden Vektorgebilde durch *einen* Winkel ausdrücken: Sei nämlich etwa $a = d + 1$, so ist nach (3.1) $s = b + 1$. Dann existiert in der a-Ebene genau eine zum Durchschnitt orthogonale Gerade und ebenso im Verbindungsraum genau eine zur b-Ebene orthogonale Gerade. Das Komplement des Winkels dieser beiden Geraden ist nun der Winkel zwischen der a- und b-Ebene. — Vgl. [4] Abschnitt 2.

Für dieses Extremum mit Nebenbedingung ist notwendig

$$\frac{\partial F^{(a)}}{\partial A^i_{\bar{\alpha}}} - \lambda \frac{\partial F^{(s)}}{\partial A^i_{\bar{\alpha}}} = 0 \qquad (\bar{\alpha} = d+1, \ldots, a).$$

Damit sind aber die $(a-d)\,b$ Gleichungen

$$\frac{\partial F^{(a)}}{\partial A^i_{\bar{\alpha}}} B^i_\beta = 0 \tag{3.4}$$

äquivalent. Nach Eigenschaft VII besteht nämlich für die Funktion

$$F^{(s)}(A_{d+1}, \ldots, A_a,\ B_1, \ldots, B_b)$$

die Identität

$$\frac{\partial F^{(s)}}{\partial A^i_{\bar{\alpha}}} B^i_\beta = 0,$$

und daher folgt aus (3.4) wieder

$$\frac{\partial F^{(a)}}{\partial A^i_{\bar{\alpha}}} = \lambda \frac{\partial F^{(s)}}{\partial A^i_{\bar{\alpha}}}.$$

Nach Busemann gilt nun folgendes *Existenztheorem*[2]):

Es seien a, b, d, s ganze Zahlen $\geqq 0$ mit Min $(a, b) = d+1$ und $a+b = s+d$. Ein s-dimensionales und ein d-dimensionales lineares Vektorgebilde sei als Summe und Durchschnitt vorgegeben. Dann existiert zu einer b-Ebene B_β genau eine a-Ebene A_α, die *normal* zu B_β ist, und ebenso zu einer a-Ebene A_α genau eine b-Ebene B_β, die *transversal* zu A_α liegt.

Hiernach sind die notwendigen Bedingungen (3.4) auch als hinreichend erkannt.

Sinus zwischen Gerade und Hyperebene. Wir gehen noch etwas genauer auf den wichtigen Spezialfall des Sinus zwischen einer Geraden A^i und einer Hyperebene $x^i_1, \ldots, x^i_{n-1}$ ein,

$$Sm(A, x_\varrho) = \frac{F^{(n)}(A, x_1, \ldots, x_{n-1})}{F^{(1)}(A)\ F^{(n-1)}(x_\varrho)} = \frac{\mathfrak{F}^{(n)} \| A^i x^i_1 \ldots x^i_{n-1} \|}{L(A)\ F^{(n-1)}(x_\varrho)},$$

dem wir nun auch negative Werte erteilen können. Führen wir die normale Vektordichte (2.6) der Hyperfläche und die Oberflächenfunktion (2.7) ein, so ergibt sich

$$Sm(A, x_\varrho) = \frac{A^i}{L(A)} \frac{\mathfrak{F}^{(n)} \mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)}. \tag{3.5}$$

[2]) Der Beweis ([4] S. 164 bis 168), zu dem man eine kompliziertere Eigenschaft konvexer Körper benötigt, wird allerdings bei Busemann mit euklidischen Hilfsmitteln geführt. Bemerkenswert ist, daß die Eindeutigkeit einer Normal-Ebene aus der strengen Konvexität von $\mathfrak{c}_1$, die einer Transversal-Ebene aus der Differenzierbarkeit der Indikatrix folgt.

Dieser Sinus wird also durch das Skalarprodukt des *Einheits*vektors $\frac{A^i}{L(A)}$ der Geraden mit dem *normierten* kovarianten Normalvektor

$$N_i = \mathfrak{F}^{(n)} \frac{\mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)} \tag{3.6}$$

der Hyperebene dargestellt.

Weil in unserem Spezialfall Durchschnitt und Verbindungsraum eindeutig festgelegt sind, stellen

$$\begin{cases} \operatorname{Max}_{A} |Sm(A, x_\varrho)| = \alpha(x_\varrho) \\ \operatorname{Max}_{x_\varrho} |Sm(A, x_\varrho)| = \alpha(A) \end{cases} \tag{3.7}$$

nur Funktionen der Hyperebenen bzw. Geraden des $\mathfrak{M}_n$ dar. Die Bedingung (3.4) lautet jetzt für eine Hyperebene x_ϱ transversal zur Geraden A

$$\frac{\partial L}{\partial A^i} x_\varrho^i = 0$$

bzw. für die Gerade A transversal zur Hyperebene x_ϱ

$$\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x_\varrho^i} A^i = 0.$$

Der normierte *Transversalvektor* zu einer Hyperebene x_ϱ ist

$$n^i = \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i}. \tag{3.8}$$

Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x_\varrho^i} n^i &= \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_k} \frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\varrho^i} n^i \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i} \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_k} \left\| \delta_k^j x_1^j \dots \overset{(\varrho)}{\delta_i^j} \dots x_{n-1}^j \right\| \\ &= \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \left\| \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_j} x_1^j \dots \overset{(\varrho)}{\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}_j}} \dots x_{n-1}^j \right\| = 0. \end{aligned}$$

Wir nennen den Vektor n^i deshalb normiert, weil sein Skalarprodukt mit dem normierten kovarianten Normalvektor (3.6)

$$n^i N_i = 1 \tag{3.9}$$

ist, wie aus der Homogenität von $f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)$ folgt.

Distanz eines Punktes von einer Hyperebene. Unter der Distanz eines Punktes von einer Hyperebene wollen wir das Volumen eines Parallelotops verstehen, das von einem in jener Hyperebene gelegenen $(n-1)$-dimensionalen Parallelotop mit dem Flächeninhalt 1 und jenem Punkt aufgespannt wird. Diese Distanz kann natürlich nicht als Minkowskischer Abstand zweier Punkte gedeutet werden.

Die Punkte einer Hyperebene, welche durch x_ϱ^i aufgespannt wird und vom festen Punkt a die Distanz r hat, genügen der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{F}^{(n)} \| x^i - a^i \, x_1^i \ldots x_{n-1}^i \|}{F^{(n-1)}(x_\varrho^i)} = r .$$

Nach kurzer Umformung ergibt dies gerade die *Hessesche Normalform* einer Hyperebene

$$(x^i - a^i) \frac{\mathfrak{F}^{(n)} \mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)} = r \tag{3.10}$$

oder die Darstellung

$$L(x - a) \, Sm(x - a, x_\varrho) = r . \tag{3.11}$$

4. Minkowskische Kugeln und Sphären.

Als erste Anwendung der eingeführten Begriffe diskutieren wir die Eigenschaften zweier interessanter Flächenklassen, die in folgender Weise definiert sind:

Die Gesamtheit aller Punkte, welche von einem festen Punkt a konstanten Abstand r besitzen, heißt n-dimensionale *Kugel* $\mathfrak{c}(a, r)$.

Die Gesamtheit aller Hyperebenen, welche von einem festen Punkt a konstante Distanz r haben, heiße n-dimensionale *Sphäre* $\mathfrak{z}(a, r)$.

Zur Aufstellung der Gleichung einer Sphäre müssen wir die Hüllfläche der Hyperebenenschar

$$(x^i - a^i) \, \mathfrak{p}_i = \frac{r}{\mathfrak{F}^{(n)}} f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)$$

bestimmen. Sie ergibt sich (vgl. [1] S. 202f.) durch Differentiation nach den homogenen Scharparametern $\mathfrak{p}_k$. Damit können wir die Gleichungen der Kugel und Sphäre in (homogener) *Parameterschreibweise* gegenüberstellen:

$$x^i - a^i = r \frac{X^i}{L(X)} \quad \Big| \quad x^i - a^i = r \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i} . \tag{4.1}$$

Nach (3.8) ist aber die Tangentialhyperebene einer Sphäre transversal zum zugehörigen Radiusvektor. Dies setzen wir in die Gleichung der die Sphäre definierenden Hyperebenenschar ein, welche in der Form (3.11) gegeben sein soll. Wegen (3.7b) erhalten wir dann die *Polargleichung* der Sphäre im Vergleich zu der der Kugel

$$L(x - a) = r \quad \Big| \quad L(x - a) \, \alpha(x - a) = r . \tag{4.2}$$

Die Sphären sind also wie die Kugeln untereinander homothetisch. Weiterhin bestätigen die Betrachtungen der letzten Nummer folgende Eigenschaften:

Jede Tangentenhyperebene der Kugel ist *transversal* zum Radiusvektor.

Jede Tangentenhyperebene der Sphäre ist *normal* zum Radiusvektor.

Busemann zeigt nun, daß die Sphären streng konvexe und differenzierbare Flächen sind[3]).

Wie die Vollkugel mit $\mathfrak{C}(a, r)$, so soll die Vollsphäre

$$L(x-a)\,\alpha(x-a) \leqq r$$

mit $\mathfrak{Z}(a, r)$ bezeichnet werden. Um eine Aussage über ihr Volumen zu bekommen, führen wir für die Sphäre eine ähnliche Umformung wie in (2.5) durch

$$\begin{aligned} J^{(n)}(\mathfrak{Z}) &= \mathfrak{F}^{(n)} \int_{\mathfrak{Z}} dx^1 \dots dx^n \\ &= \frac{1}{n} \oint_{\mathfrak{z}} \mathfrak{F}^{(n)} \,||\, x^i - a^i\, x_1^i \dots x_{n-1}^i \,||\, du^1 \dots du^{n-1} \end{aligned}$$

und nach (4.1b)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \oint_{\mathfrak{z}} r\, \frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_k}\, \mathfrak{p}_k\, du^1 \dots du^{n-1} \\ &= \frac{r}{n} \oint_{\mathfrak{z}} f^{(n-1)}(\mathfrak{p}_k)\, du^1 \dots du^{n-1}. \end{aligned}$$

Da das Kugelvolumen nach (2.2) festgelegt ist, gelten also die beiden Beziehungen

$$(4.3) \qquad J^{(n)}(\mathfrak{C}) = r^n\, \omega^{(n)} \;\Big|\; n\, J^{(n)}(\mathfrak{Z}) = r\, J^{(n-1)}(\mathfrak{z}).$$

Wir erwähnen noch einige sehr wichtige Eigenschaften, die Busemann genau untersucht hat (vgl. [2] sowie [3]):

$\mathfrak{C}(a, r)$ hat größtes Volumen unter allen Mengen vom Durchmesser $2r$.

$\mathfrak{Z}(a, r)$ löst das *isoperimetrische Problem*.

Weiterhin erhält man für die Oberfläche eines n-dimensionalen konvexen Körpers $\mathfrak{K}$

$$J^{(n-1)} = \lim_{r \to 0} \frac{J^{(n)}(\mathfrak{K}_r) - J^{(n)}(\mathfrak{K})}{r},$$

wobei der Parallelkörper $\mathfrak{K}_r$ durch

$$\mathfrak{K}_r = \bigcup_{x \in \mathfrak{K}} \mathfrak{Z}(x, r)$$

definiert ist.

Analog zur Indikatrix nennt Busemann die Einheitssphäre $\mathfrak{z}_1$ *Isoperimetrix*.

5. Krümmung der Kurven und Hyperflächen im $\mathfrak{M}_n$.

Nach der Darstellung der „analytischen Geometrie" des $\mathfrak{M}_n$ soll die Theorie der Krümmung von Kurven und Hyperflächen im Minkowskischen Raum skizziert werden. Dabei beschreiten wir den üblichen Weg, indem wir

[3]) Der Beweis (vgl. [4] S. 164f.) benutzt wiederum jene Eigenschaft konvexer Körper, auf die in Fußnote 2 bereits hingewiesen wurde. Dabei ist sogar für die Differenzierbarkeit der Sphäre die strenge Konvexität der Indikatrix nötig; denn es muß ausgeschlossen werden, daß alle $\partial f^{(n-1)}/\partial \mathfrak{p}_i$ für einen gewissen Bereich der Variablen $\mathfrak{p}_k$ konstant sind.

die Krümmungsverhältnisse einer Hyperfläche durch die Krümmung gewisser Flächenkurven kennzeichnen — ein Prinzip, das sich in der Finslerschen Geometrie als nicht brauchbar erweisen wird.

Erste Krümmung einer Kurve $x(t)$. Als Kurvenparameter benutzen wir die Bogenlänge. Dann seien $x(s)$ ein fester Kurvenpunkt und $x(s+h)$, $x(s+k)$ zwei ihm benachbarte. Die erste Krümmung der Kurve werde nun nach Busemann (vgl. [4] Gl. 39) durch

$$\varkappa = 2 \lim_{h,k \to 0} \frac{Sm\,(x(s+h) - x(s),\, x(s+k) - x(s))}{|k-h|} \tag{5.1}$$

definiert. Zur Berechnung dieses Grenzwertes verwenden wir die Taylorsche Formel

$$x(s+h) - x(s) = h\,x'(s) + \frac{h^2}{2}\,x''(s) + (h^3).$$

Nach der Sinusdefinition und den Eigenschaften der Flächenfunktion erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} &Sm\,(x(s+h) - x(s),\; x(s+k) - x(s)) \\ &\quad = \frac{F^{(2)}\left(h\,x' + \frac{h^2}{2}\,x'' + \cdots,\, k\,x' + \frac{k^2}{2}\,x'' + \cdots\right)}{L\,(h\,x' + \cdots)\,L\,(k\,x' + \cdots)} \\ &\quad = \frac{F^{(2)}\left(x' + \cdots,\, \frac{k-h}{2}\,x'' + \cdots\right)}{L\,(x' + \cdots)\,L\,(x' + \cdots)} \\ &\quad = \frac{|k-h|}{2}\,\frac{F^{(2)}\,(x' + \cdots,\, x'' + \cdots)}{L\,(x' + \cdots)\,L\,(x' + \cdots)}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (5.1) ein, so ergibt sich für die erste Krümmung einer Kurve

$$\varkappa = F^{(2)}\,(x',\, x'')$$

oder bei Transformation auf beliebige Parameter

$$\varkappa = \frac{F^{(2)}\,(\dot{x},\, \ddot{x})}{L^3\,(\dot{x})} \geqq 0. \tag{5.2}$$

Dabei ist $\varkappa = 0$ für die Geraden charakteristisch.

Dieser Ausdruck bei beliebiger Parameterwahl ist dem der gewöhnlichen Differentialgeometrie ganz analog (vgl. etwa [1] S. 27 Gl. (80)). Um auch für Bogenlängenparameter eine entsprechende Formel zu erhalten, berechnen wir den Inhalt des von x' und x'' aufgespannten Parallelogramms

$$F^{(2)}\,(x',\, x'') = L\,(x')\,L\,(x'')\,Sm\,(x',\, x'').$$

Dann ist

$$\varkappa = L\,(x'')\,Sm\,(x',\, x'') \tag{5.3}$$

wobei x'' *transversal* zu x' ist. Letzteres folgt nämlich aus $L\,(x') = 1$ durch Differentiation

$$\frac{\partial L\,(x')}{\partial x'^i}\,x''^i = 0.$$

Die von $\dot{x}$ und $\ddot{x}$ aufgespannte Ebene heiße *Schmiegebene* $\mathfrak{S}$.

Normalkrümmung einer Hyperflächenkurve. Auf der Hyperfläche $x(u^\varrho)$ werde eine Kurve $x(u^\varrho(t))$ gewählt. Als deren *Normalkrümmung* bezeichnen wir den Ausdruck

$$\varkappa\, Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}),$$

wobei $\mathfrak{S}$ die Schmiegebene der Kurve und $\mathfrak{T}$ die Tangentialhyperebene der Hyperfläche in dem betrachteten Punkt ist. Da nun $\mathfrak{S}$ von

$$\dot{x}^i = x^i_\alpha \dot{u}^\alpha, \quad \ddot{x}^i = x^i_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + x^i_\alpha \ddot{u}^\alpha$$

und $\mathfrak{T}$, wie wir annehmen können, von

$$\dot{x}^i, x^i_2, \ldots, x^i_{n-1} \qquad (\dot{u}^1 > 0)$$

aufgespannt wird, erhalten wir nach (3.3) und (3.6)

$$\begin{aligned} Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) &= \frac{L(\dot{x})\,\mathfrak{F}^{(n)} \left\| \ddot{x}^i\, \dot{x}^i\, x^i_2 \ldots x^i_{n-1} \right\|}{F^{(2)}(\ddot{x}, \dot{x})\, F^{(n-1)}(\dot{x}, x_2, \ldots, x_{n-1})} \\ &= \frac{L(\dot{x})}{F^{(2)}(\ddot{x}, \dot{x})} \frac{\mathfrak{F}^{(n)} \left\| x^i_{\alpha\beta}\, x^i_1 \ldots x^i_{n-1} \right\|}{F^{(n-1)}(x_\varrho)} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta \\ &= \frac{L(\dot{x})}{F^{(2)}(\ddot{x}, \dot{x})} (x^i_{\alpha\beta} N_i)\, \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta. \end{aligned}$$

Führt man die Abkürzung

$$\bar{L}(u, \dot{u}) = L\left(x^i_\varrho(u)\, \dot{u}^\varrho\right) \tag{5.4}$$

und

$$b_{\alpha\beta}(u) = x^i_{\alpha\beta} N_i \tag{5.5}$$

ein, so folgt wegen (5.2) für die Normalkrümmung

$$\varkappa\, Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \frac{b_{\alpha\beta}(u)\, \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta}{\bar{L}^2(u, \dot{u})}. \tag{5.6}$$

In diesem Ergebnis tritt $\ddot{u}^\varkappa$ nicht mehr auf. Damit haben wir den *Satz von Meusnier* bestätigt: Alle Hyperflächenkurven durch dasselbe Linienelement $(u, \dot{u})$ besitzen gleiche Normalkrümmung.

Bezeichnen wir jetzt die Krümmung einer Hyperflächenkurve, deren Schmiegebene $\mathfrak{Z}$ die Hyperflächen-Transversale (3.8) enthält, mit $1/\varrho$, so gilt für die Normalkrümmung

$$\varkappa\, Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \pm \frac{1}{\varrho} \frac{L(\dot{x})\, n^k N_k}{F^{(2)}(\dot{x}, n)}$$

und wegen (4.2b)

$$= \pm \frac{1}{\varrho} \frac{L(\dot{x})}{F^{(2)}(\dot{x}, n)} L(n)\, \alpha(n),$$

also

$$\varkappa\, Sm(\mathfrak{S}, \mathfrak{T}) = \pm \frac{1}{\varrho} \frac{\alpha(n)}{Sm(\dot{x}, n)}. \tag{5.7}$$

Dabei steht $+$ oder $-$, wenn $\ddot{x}^i$ nach derselben Seite wie n^i weist oder nicht.

Führen wir durch

$$\frac{\dot{u}^\alpha}{L(u,\dot{u})} = \sqrt{|\varkappa\, Sm(\mathfrak{S},\mathfrak{T})|}\,\dot{v}^\alpha$$

neue Veränderliche $\dot{v}^\alpha$ ein, dann gewinnen wir aus (5.6) die *Dupinsche Indikatrix*

$$b_{\alpha\beta}(u)\,\dot{v}^\alpha\,\dot{v}^\beta = \pm 1.$$

Sie ist homothetisch zur Näherungsschnittkurve der Hyperfläche, welche durch eine Parallelhyperebene zur Tangentialhyperebene in $x(u)$ mit der Distanz δ erzeugt wird. Nach (3.10) ist nämlich diese Schnittkurve

$$\begin{aligned}(x^i(u+du) - x^i(u))\,N_i(u) &= \tfrac{1}{2}\,x^i_{\alpha\beta}\,N_i\,du^\alpha\,du^\beta + \cdots \\ &= \tfrac{1}{2}\,b_{\alpha\beta}(u)\,du^\alpha\,du^\beta + \cdots = \delta.\end{aligned}$$

Wollte man jetzt die Hauptkrümmungen wie in der klassischen Differentialgeometrie durch die stationären Werte der Normalkrümmung festlegen, so stünde man vor der Schwierigkeit, daß im allgemeinen gar nicht $(n-1)$ reelle Hauptkrümmungen existieren. Es soll deshalb ein anderer Weg eingeschlagen werden.

Weingartensche Ableitungsgleichungen. Als begleitendes n-Bein der Hyperfläche benutzen wir

$$x^i_\alpha, \qquad n^i = \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}}\,\frac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i},$$

wobei der normierte Vektor n^i *transversal* zur Hyperfläche ist. Die Minkowskische Einheitssphäre stellt also das „Transversalenbild" der Hyperfläche dar. Wählen wir noch die kovarianten Vektoren

$$X^\alpha_i = \frac{1}{F^{(n-1)}}\,\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial x^i_\alpha}, \qquad N_i = \frac{\mathfrak{F}^{(n)}\,\mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}},$$

wobei der normierte Vektor N_i *normal* zur Hyperfläche steht, so gelten die Rechenregeln

$$X^\alpha_i\,n^i = 0, \qquad x^i_\alpha\,N_i = 0$$

und

$$X^\alpha_i\,x^i_\beta = \delta^\alpha_\beta, \qquad n^i\,N_i = 1.$$

Nun erhält man aus dem Ansatz

$$n^i_\alpha = -\,B^\beta_\alpha\,x^i_\beta + C_\alpha\,n^i$$

durch Überschieben mit N_i

$$\begin{aligned}C_\alpha &= n^i_\alpha\,N_i \\ &= \frac{\partial^2 f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i\,\partial \mathfrak{p}_k}\,\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial u^\alpha}\,\frac{\mathfrak{p}_i}{f^{(n-1)}}.\end{aligned}$$

Wegen der Homogenität nullter Ordnung von $\dfrac{\partial f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_k}$ folgt dann

$$C_\alpha = 0.$$

Überschieben wir unseren Ansatz dagegen mit X_r^β, so ergibt sich

$$-B_\alpha^\beta = n_\alpha^i X_i^\beta = \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \frac{\partial^2 f^{(n-1)}}{\partial \mathfrak{p}_i \partial \mathfrak{p}_k} \frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\varrho^r} x_{\varrho\alpha}^r X_i^\beta$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{F}^{(n)}} \frac{1}{f^{(n-1)}} \frac{\partial^2 \frac{1}{2}(f^{(n-1)})^2}{\partial \mathfrak{p}_i \partial \mathfrak{p}_k} \frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\varrho^r} x_{\varrho\alpha}^r X_i^\beta.$$

Aus der Definition (2.6) der Vektordichte $\mathfrak{p}_k$ gewinnt man nach den Determinantensätzen die Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\sigma^r} x_\sigma^s = \mathfrak{p}_k \delta_r^s - \mathfrak{p}_r \delta_k^s,$$

die durch Multiplikation mit X_s^ϱ in

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_k}{\partial x_\varrho^r} = \mathfrak{p}_k X_r^\varrho - \mathfrak{p}_r X_k^\varrho \tag{5.8}$$

übergeht. Setzen wir dies in den zu berechnenden Ausdruck ein, so erhalten wir nach (5.5)

$$B_\alpha^\beta = b_{\alpha\varrho} G^{\varrho\sigma}, \tag{5.9}$$

wenn man die Bezeichnungen

$$G^{ik}(\mathfrak{p}_r) = \frac{1}{(\mathfrak{F}^{(n)})^2} \frac{\partial^2 \frac{1}{2}(f^{(n-1)})^2}{\partial \mathfrak{p}_i \partial \mathfrak{p}_k} \tag{5.10}$$

und

$$G^{\varrho\sigma}(u) = G^{ik}(\mathfrak{p}_r) X_i^\varrho X_k^\sigma \tag{5.11}$$

einführt. Die Weingartenschen Gleichungen

$$n_\alpha^i = -B_\alpha^\beta x_\beta^i \tag{5.12}$$

zeigen, daß die Zuordnung zwischen einer Hyperfläche und ihrem sphärischen Bild durch parallele Tangentialhyperebenen erzeugt wird. Die Hyperflächentheorie im $\mathfrak{M}_n$ ist also eine Relativgeometrie der Hyperfläche bezüglich der Isoperimetrix.

Für kovariante Vektoren lauten die Weingartenschen Ableitungsgleichungen

$$N_{i\alpha} = -b_{\alpha\beta} X_i^\beta. \tag{5.13}$$

Hauptkrümmungen. Wir suchen jetzt die Hauptkrümmungsrichtungen auf der Hyperfläche, d.h. diejenigen Richtungen $\dot{u}^\alpha$, für welche

$$n_\alpha^i \dot{u}^\alpha = -\frac{1}{R} x_\alpha^i \dot{u}^\alpha$$

ist. Nach Einsetzen der Ableitungsgleichungen (5.12) ergibt sich

$$\left(B_\alpha^\varrho - \frac{1}{R} \delta_\alpha^\varrho\right) \dot{u}^\alpha x_\varrho^i = 0.$$

Daraus folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der Tangentenvektoren x_ϱ^i

$$\left(B_\alpha^\varrho - \frac{1}{R}\,\delta_\alpha^\varrho\right)\dot{u}^\alpha = 0.$$

Berücksichtigen wir bei unseren weiteren Untersuchungen nur Hyperflächenpunkte mit

(5.14) $$G^{\varrho\sigma}(u)\,\xi_\varrho\,\xi_\sigma > 0 \quad \text{für} \quad \xi_\alpha \neq 0,$$

so ist $||G^{\varrho\sigma}|| > 0$, und es läßt sich durch

$$G^{\varrho\sigma}\,G_{\varrho\tau} = \delta_\tau^\sigma$$

der kovariante Hyperflächentensor $G_{\varrho\tau}(u)$ einführen. Wir können dann unsere Gleichung für die Hauptkrümmungsrichtungen mit $G_{\varrho\beta}$ überschieben

$$\left(b_{\alpha\beta} - \frac{1}{R}\,G_{\alpha\beta}\right)\dot{u}^\alpha = 0.$$

Weil nun nicht alle Richtungskomponenten $\dot{u}^\alpha$ verschwinden dürfen, erhalten wir

(5.15) $$\left|\left|b_{\alpha\beta} - \frac{1}{R}\,G_{\alpha\beta}\right|\right| = 0.$$

Diese verallgemeinerte Säkulargleichung zeigt, daß nur *reelle* Hauptkrümmungen $1/R$ existieren (vgl. [6] S. 14). Wie man weiter erkennt, gibt es in jedem Hyperflächenpunkt, welcher der Voraussetzung (5.14) genügt, genau $(n-1)$ linear unabhängige reelle Hauptkrümmungsrichtungen.

Zum Abschluß dieser Betrachtungen über Krümmungen von Kurven und Hyperflächen im $\mathfrak{M}_n$ soll noch eine *geometrische* Interpretation der Hauptkrümmungen abgeleitet werden. Hierbei wählen wir Krümmungslinien als Parameterkurven. Dann gelten nämlich die *Formeln von Rodrigues*

(5.16) $$n_\alpha^i = -\frac{1}{R^{(\alpha)}}\,x_\alpha^i.$$

Aus ihnen folgt

$$L^2(n_\alpha^i) = \frac{1}{(R^{(\alpha)})^2}\,L^2(x_\alpha^i)$$

und außerdem durch Multiplikation mit $N_{i\alpha}$ nach (5.13)

$$b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle = -\frac{1}{R^{(\alpha)}}\,b_{\alpha\alpha}\langle x\rangle,$$

wobei $b_{\alpha\alpha}$ jeweils auf der Hyperfläche $x^i(u)$ bzw. ihrem sphärischen Bild $n^i(u)$ zu nehmen ist. Weiterhin ist wegen (5.6) und (5.7) in Richtung der α-ten Parameterkurve

$$\pm\,\frac{1}{\varrho^{(\alpha)}\langle x\rangle}\,\frac{\alpha(n^i)}{Sm(x_\alpha^i, n^i)} = \frac{b_{\alpha\alpha}\langle x\rangle}{L^2(x_\alpha^i)}$$

und auf dem sphärischen Bild in derselben Richtung

$$-\,\frac{1}{\varrho^{(\alpha)}\langle n\rangle}\,\frac{\alpha(n^i)}{Sm(n_\alpha^i, n^i)} = \frac{b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle}{L^2(n_\alpha^i)}.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergibt sich nun

$$\pm \frac{\varrho^{(\alpha)}\langle x\rangle}{\varrho^{(\alpha)}\langle n\rangle} = \frac{L^2(x_\alpha^i)}{b_{\alpha\alpha}\langle x\rangle} \frac{b_{\alpha\alpha}\langle n\rangle}{L^2(n_\alpha^i)} = R^{(\alpha)}.$$

Damit erhält die Hauptkrümmung $1/R^{(\alpha)}$ eine entsprechende geometrische Deutung wie in der Relativgeometrie:

$$R^{(\alpha)} = \pm \frac{\varrho^{(\alpha)}\langle x\rangle}{\varrho^{(\alpha)}\langle n\rangle}. \tag{5.17}$$

Hierbei ist also $1/\varrho^{(\alpha)}$ die Krümmung einer Hyperflächenkurve, deren Schmiegebene von der zu $1/R^{(\alpha)}$ gehörenden Hauptkrümmungsrichtung und der Hyperflächentransversalen n^i aufgespannt wird. Auf diese Weise läßt sich die Krümmung einer Hyperfläche des $\mathfrak{M}_n$ auf die *Kurvenkrümmung* zurückführen.

Literatur.

[1] Blaschke, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Bd. I, 4. Aufl. 1945. — [2] Busemann, H.: Intrinsic area. Ann. of Math. (2) **48**, 755—781 (1947). — [3] Busemann, H.: The isoperimetric problem for Minkowski area. Amer. J. Math. **71**, 743—762 (1949). — [4] Busemann, H.: The foundations of Minkowskian geometry. Comm. Math. Helv. **24**, 156—187 (1950). — [5] Busemann, H.: The geometry of Finsler spaces. Bull. Amer. Math. Soc. **57**, 5—16 (1950). — [6] Perron, O.: Algebra, Bd. 2. — [7] Rund, H.: Zur Begründung der Differentialgeometrie der Minkowskischen Räume. Arch. Math. **3**, 60f. (1952). — [8] Sperner, E.: Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, 1. Teil. 1948.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 31. Januar 1953.)

KNESER, M., und D. PUPPE
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 376—384 (1953)

Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten.

Von
MARTIN KNESER und DIETER PUPPE.

Einleitung.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist in Verschärfung von [7] der Nachweis, daß die quadratische Form eines Knotens (GOERITZ [3]) und die eindimensionale Homologiegruppe der zweifachen Überlagerung des Knotenaußenraumes, aufgefaßt als Gruppe mit Verschlingung, sich gegenseitig eindeutig bestimmen. Der Beweis dieses Satzes ist, wenn man sich auf das Ergebnis von SEIFERT [8] stützt, rein algebraischer Natur und zeigt zugleich, ganz unabhängig von der Knotentheorie, einen engen Zusammenhang zwischen Gruppen ungerader Ordnung mit Verschlingung und gewissen Klassen quadratischer Formen. Der gleiche Zusammenhang besteht auch für Gruppen gerader Ordnung, doch erfordert der Beweis dafür weitere Hilfsmittel aus der Theorie der quadratischen Formen. So tritt insbesondere an die Stelle des hier benutzten Satzes von MEYER über Geschlechter indefiniter quadratischer Formen der allgemeinere Satz von EICHLER ([4] S. 99), und daher ist ein Eingehen auf die Spinordarstellung der orthogonalen Gruppen (vgl. [4] § 4) nötig. Um den Beweis möglichst einfach zu halten, ist hier nur der für die Knotentheorie interessante Spezialfall von Gruppen ungerader Ordnung, in dem man ohne diese Hilfsmittel auskommt, durchgeführt.

§ 1. Die quadratische Form eines Knotens.

Jeder regulären Projektion einer Knotenlinie ist nach GOERITZ [3] eine ganzzahlige symmetrische Matrix $A = (a_{ik})$ (d.h. die quadratische Form $\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k$) mit ungerader Determinante zugeordnet. Sie ist durch den Knoten (d.h. die Isotopieklasse der Knotenlinie) bis auf folgende Abänderungen bestimmt:

Q_1: Unimodulare Transformation: $A \to S' A S$ mit S ganz und $|S| = \pm 1$.

Q_2: „Anhängen von ± 1“:

$$A \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

sowie die umgekehrte Operation.

Die durch diese zulässigen Abänderungen definierte Äquivalenzklasse von quadratischen Formen wird kurz als die „quadratische Form des Knotens“ bezeichnet.

Die eben behauptete Invarianz von A bis auf die Abänderungen Q_1, Q_2 folgt insofern noch nicht unmittelbar aus [3], als dort noch eine weitere Abänderung zugelassen wird, nämlich

$$A \to \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die inverse. Tatsächlich läßt sich diese aber aus Q_1 und Q_2 zusammensetzen, was wir nun zeigen wollen:

1. Fall. a ist ungerade. Hier folgt die Behauptung sofort aus der unimodularen Äquivalenz von

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(Man erhält die zweite aus der ersten Matrix durch Subtraktion der mit $[a/2]$ multiplizierten zweiten Zeile und Spalte von der ersten und anschließende Subtraktion der ersten Zeile und Spalte von der zweiten.)

2. Fall. a ist gerade. Dann ist offenbar

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent. Nun ist zwar

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{nicht mit} \quad \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

äquivalent, wohl aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Die Überführung der ersten in die zweite Matrix läßt sich in folgenden Schritten vollziehen:

Addition der dritten Zeile und Spalte zur ersten.

Subtraktion der ersten Zeile und Spalte von der zweiten und dritten.

Subtraktion der zweiten Zeile und Spalte von der dritten.)

Danach ist auch in diesem Fall klar, wie sich die dritte Abänderung aus Q_1 und Q_2 zusammensetzt: Man hängt der Reihe nach $1, -1, 1$ an, transformiert unimodular und läßt 1 weg.

§ 2. Hilfsmittel aus der Theorie der quadratischen Formen.

In diesem Paragraphen sollen einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen zusammengestellt werden, die in dem folgenden Beweis des angekündigten Ergebnisses benutzt werden. Die entscheidende Rolle wird dabei die lokale Betrachtung einer quadratischen Form an den einzelnen Primstellen spielen. Das bedeutet: Wir werden die Äquivalenzklassen von

Formen zunächst nicht im rationalen Zahlkörper K sondern in seinen perfekten Hüllen K_q untersuchen ($q=p=$ Primzahl entspricht der p-adischen Bewertung von K und $q=\infty$ der gewöhnlichen Betragsbewertung) und daraus auf das Verhalten in K Rückschlüsse ziehen. Wir bezeichnen den Ganzheitsbereich in K und K_p mit Z bzw. Z_p. Der Ring der n-reihigen Matrizen aus Elementen eines Ringes R sei $\mathfrak{M}^n(R)$ oder kürzer $\mathfrak{M}(R)$. Unimodulare Transformation in K_p bedeutet dann Transformation mit einem $S \in \mathfrak{M}(K_p)$, so daß $S, S^{-1} \in \mathfrak{M}(Z_p)$.

Hilfssatz 1. *Ist p ungerade, so läßt sich jede symmetrische Matrix aus $\mathfrak{M}(Z_p)$ unimodular in eine Diagonalmatrix aus $\mathfrak{M}(Z)$ transformieren* ([5] S. 83 th. 32).

Hilfssatz 2. *Ist p ungerade, so lassen sich zwei symmetrische Matrizen aus $\mathfrak{M}(Z_p)$, deren Determinanten Einheiten (in Z_p) sind und sich nur um einen quadratischen Faktor unterscheiden, unimodular ineinander transformieren* ([5] S. 92 cor. 36b).

Im Falle $p=2$ haben wir es nur mit eigentlich primitiven Matrizen zu tun; das sind Matrizen $A \in \mathfrak{M}(Z_2)$, bei denen mindestens eines der Diagonalglieder a_{ii} ungerade ist. Für sie gilt:

Hilfssatz 3. *Zwei symmetrische, eigentlich primitive Matrizen aus $\mathfrak{M}(Z_2)$ mit ungerader Determinante, die sich in K_2 ineinander transformieren lassen, kann man sogar unimodular ineinander transformieren* ([5] S. 91 th. 36).

Ein weiterer Hilfssatz erlaubt es, aus der Äquivalenz zweier rationaler Matrizen in allen K_q mit $q \neq p$ auf die Äquivalenz in K_p zu schließen:

Hilfssatz 4. *Sind zwei symmetrische rationale Matrizen, deren Determinanten sich nur um einen quadratischen Faktor unterscheiden, in allen K_q mit höchstens einer Ausnahme $q=p\neq\infty$ ineinander transformierbar, so sind sie es auch in K_p.*

Dieser Satz folgt z.B. aus [5] S. 32 th. 12 und S. 47 th. 15, wenn man beachtet, daß die Invariante c_p wegen $\prod_q c_q = 1$ (vgl. [5] S. 77 th. 29) durch die anderen c_q bestimmt ist.

Schließlich brauchen wir zum Übergang von der unimodularen Äquivalenz in allen K_q zu der in K einen Spezialfall des Satzes von MEYER ([6] S. 247), der besagt, daß unter gewissen Voraussetzungen in einem Geschlecht indefiniter quadratischer Formen nur eine Klasse liegt.

Hilfssatz 5. *Haben zwei ganzzahlige symmetrische Matrizen ungerade Determinante und die Gestalt*

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

und sind sie in jeder perfekten Hülle K_q von K unimodular ineinander transformierbar[1]*, so sind sie es auch in K.*

[1]) Für den Fall $q=\infty$ entfällt der Zusatz „unimodular".

§ 3. Gruppen mit Verschlingung.

Es sei zunächst noch einmal an die Definition einer Gruppe mit Verschlingung erinnert (vgl. [1], [2], [8]): Ist $\mathfrak{G}$ eine abelsche Gruppe und K/Z die Gruppe der rationalen Zahlen mod 1, so heißt eine bilineare symmetrische Abbildung

$$V: \quad \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to K/Z$$

eine Verschlingung in $\mathfrak{G}$. Erfüllt V die Bedingung:

Aus $V(a, x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{G}$ folgt $a = 0$, so heißt die Verschlingung primitiv. Eine Gruppe, in der eine primitive Verschlingung festgelegt ist, wird Gruppe mit Verschlingung oder kurz V-Gruppe genannt. Ist V irgendeine (nicht notwendig primitive) Verschlingung in $\mathfrak{G}$, so gibt es eine eindeutig bestimmte Untergruppe $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{G}$, so daß V in $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ eine primitive Verschlingung induziert; es ist nämlich $\mathfrak{N} = \{a \mid V(a, x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{G}\}$.

Üblicherweise wurde bisher bei der Definition der Gruppe mit Verschlingung die Endlichkeit von $\mathfrak{G}$ verlangt. Wir erhalten als Folgerung:

Eine endlich erzeugte V-Gruppe ist sogar endlich.

Beweis. Sei $a_1, \ldots, a_n$ ein Erzeugendensystem. Es gibt offenbar eine ganze Zahl g, so daß $V(a_i, a_k) \cdot g = 0$ ist für alle i, k. Daraus folgt wegen der Bilinearität und der Primitivität von V: $g \cdot a_i = 0$. Die Ordnung der Gruppe ist also höchstens g^n.

Im folgenden wird nur von endlich erzeugten, also endlichen V-Gruppen die Rede sein. Zur Vereinfachung der Schreibweise sei noch vereinbart, daß $V(x, y)$ auch als Multiplikation $x \cdot y$ geschrieben wird.

Ist $\mathfrak{a} = (a_i)$ ein (endliches) Erzeugendensystem einer V-Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist durch

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}' \equiv A \bmod 1 \tag{1}$$

eine symmetrische rationale Matrix A bis auf Kongruenz mod 1 bestimmt. Wir nennen sie Verschlingungsmatrix von $\mathfrak{G}$ zum Erzeugendensystem $\mathfrak{a}$. Umgekehrt ist durch A die Struktur der V-Gruppe festgelegt. (1) bestimmt nämlich die Verschlingung für die Erzeugenden, wegen der Bilinearität also für alle Elemente von $\mathfrak{G}$, und die Forderung der Primitivität definiert die Relationen zwischen den Erzeugenden a_i; denn für ein System ganzer Zahlen ξ verschwindet $\xi' \mathfrak{a}$ genau dann, wenn $\xi' \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}' \equiv \xi' A \equiv 0 \bmod 1$ ist. Schließlich gibt es wirklich zu jeder symmetrischen rationalen Matrix A eine V-Gruppe — wir nennen sie $\mathfrak{G}(A)$ —, für die A eine Verschlingungsmatrix ist; denn ist n die Reihenzahl von A und $\mathfrak{a} = (a_i)$ die kanonische Basis der Gruppe Z^n, so ist durch (1) eine Verschlingung V in Z^n definiert, und die Faktorgruppe, für die V primitiv ist, hat A als Verschlingungsmatrix.

Ist S eine unimodulare Matrix, A Verschlingungsmatrix von $\mathfrak{G}$ bezüglich $\mathfrak{a}$, so ist

$S A S'$ Verschlingungsmatrix bezüglich $S\,\mathfrak{a}$,

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ Verschlingungsmatrix bezüglich $(\mathfrak{a}, 0)$.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

Satz 1. *Jede rationale symmetrische Matrix A bestimmt genau eine V-Gruppe $\mathfrak{G}(A)$, deren Verschlingungsmatrix sie ist, und $\mathfrak{G}(A)$ ändert sich nicht, wenn man auf A die Operationen Q_1, Q_2 von § 1 anwendet.*

Ein Beispiel für eine V-Gruppe ist die Torsionsgruppe der Dimension $2n+1$ einer orientierbaren $(4n+3)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit (vgl. [8]). Die Verschlingung zweier Homologieklassen ist definiert durch die Verschlingungszahl von zwei Repräsentanten, nachdem man die Mannigfaltigkeit in fester Weise orientiert hat. Für die zweifache Überlagerung des Außenraumes eines Knotens $\mathfrak{k}$ zeigte SEIFERT [9]: Die Torsionsgruppe der Dimension 1 stimmt mit der Homologiegruppe $\mathfrak{H}^1$ überein und ist (in unserer Bezeichnung) die V-Gruppe $\mathfrak{G}(Q^{-1})$, wenn Q die nach § 1 zu einer regulären Projektion eines Repräsentanten von $\mathfrak{k}$ gehörende Matrix ist. Daraus und aus Satz 1 folgt nun:

Satz 2. *Die V-Gruppe $\mathfrak{H}^1$ (Homologiegruppe der zweifachen Überlagerung des Knotens $\mathfrak{k}$) ist durch die quadratische Form von $\mathfrak{k}$ eindeutig bestimmt.*

Das ist der eine Teil des angekündigten Ergebnisses. Um den Beweis des zweiten Teils vorzubereiten, betrachten wir den Übergang von K zu seinen perfekten Hüllen nun auch bei den V-Gruppen. K_∞ kommt dabei nicht in Betracht; es wird sich nur um K_p mit $p =$ Primzahl handeln. Bekanntlich gibt es für jedes $c \in K_p$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$$c = \sum_{\nu=-k}^{\infty} c_\nu \cdot p^\nu, \quad 0 \leq c_\nu < p.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Abbildung

$$\varphi_p: \quad c \to \sum_{\nu=-k}^{-1} c_\nu \cdot p^\nu$$

einen Isomorphismus von K_p/Z_p in K/Z definiert. Die Abbildung φ_p hat die Eigenschaft, daß für rationales r im Nenner der Differenz $r - \varphi_p(r)$ die Primzahl p nicht aufgeht, während der Nenner von $\varphi_p(r)$ eine Potenz von p ist. Daraus folgt, daß im Nenner von $r - \sum_p \varphi_p(r)$ überhaupt keine Primzahl aufgeht, diese Zahl also ganz ist. Anders ausgedrückt

$$\sum_p \varphi_p(r) \equiv r \bmod 1.$$

Wir können nun auch jeder symmetrischen Matrix $A \in \mathfrak{M}(K_p)$ durch die Festsetzung

$$\mathfrak{G}_p(A) = \mathfrak{G}(\varphi_p(A))$$

eine V-Gruppe $\mathfrak{G}_p(A)$ zuordnen. Für rationales A ist sowohl $\mathfrak{G}(A)$ als auch $\mathfrak{G}_p(A)$ für alle p definiert. Der Zusammenhang dieser Gruppen ergibt sich aus dem Hilfssatz 6. Zuvor definieren wir: Sind $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_\nu$ V-Gruppen, von denen nur endlich viele sich nicht auf Null reduzieren, ist $\mathfrak{G} = \sum_\nu \mathfrak{G}_\nu$ im Sinne der

loßen Gruppenstruktur und gilt

$$V\left(\sum_\nu a_\nu, \sum_\nu b_\nu\right) = \sum_\nu V(a_\nu, b_\nu), \quad a_\nu, b_\nu \in \mathfrak{G}_\nu,$$

o heißt $\mathfrak{G}$ die direkte Summe der V-Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$. Offensichtlich kann man aus vorgegebenen V-Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$ ihre direkte Summe eindeutig konstruieren.

Hilfssatz 6. *$\mathfrak{G}_p(A)$ ist eine p-Gruppe für beliebiges symmetrisches $A \in \mathfrak{M}(K_p)$ und für rationales A ist $\mathfrak{G}(A)$ direkte Summe der V-Gruppen $\mathfrak{G}_p(A)$:*

$$\mathfrak{G}(A) = \sum_p \mathfrak{G}_p(A),$$

d.h. $\mathfrak{G}_p(A)$ ist der p-Bestandteil von $\mathfrak{G}(A)$.

Beweis. $\mathfrak{G}_p(A)$ hat $\varphi_p(A)$ als Verschlingungsmatrix, in deren Nennern nur die Primzahl p vorkommt; also annulliert eine genügend hohe Potenz von p als Faktor die ganze Verschlingungsfunktion V und daher wegen der Primitivität auch jedes Element der Gruppe, d.h. $\mathfrak{G}_p(A)$ ist p-Gruppe.

Da $\varphi_p(A)$ bei rationalem A für fast alle p ganz ist, können wir die direkte Summe $\overline{\mathfrak{G}}$ der V-Gruppen $\mathfrak{G}_p(A)$ bilden. Gehört $\varphi_p(A)$ zu dem Erzeugendensystem $\mathfrak{a}^p = (a_i^p)$ von $\mathfrak{G}_p(A)$, so ist $\mathfrak{a} = \sum_p \mathfrak{a}^p = \left(\sum_p a_i^p\right)$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ mit

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}' \equiv \sum_p \varphi_p(A) \equiv A \bmod 1.$$

Wie behauptet, ist also $\overline{\mathfrak{G}} \cong \mathfrak{G}(A)$.

Wir haben oben gesehen, daß $\mathfrak{G}(A)$ sich bei unimodularen Transformationen nicht ändert. Für $\mathfrak{G}_p(A)$ gilt eine analoge Aussage, die wir in folgendem brauchen werden.

Hilfssatz 7. *$\mathfrak{G}_p(A)$ ist gegenüber unimodularen Transformationen von A in K_p invariant.*

Beweis. Sei S eine in K_p unimodulare Matrix und p^ω der Hauptnenner von A, woraus folgt, daß Multiplikation mit p^ω die ganze Gruppe annulliert. Dann wählen wir ganzrationale Matrizen $\overline{S}$ und $\overline{S}_1$, für die

$$\overline{S} \equiv S \bmod p^\omega, \quad \overline{S}_1 \equiv S^{-1} \bmod p^\omega$$

gilt. Gehört die Verschlingungsmatrix $\varphi_p(A)$ zu dem Erzeugendensystem $\mathfrak{a}$, so ist $\overline{\mathfrak{a}} = \overline{S}\,\mathfrak{a}$ ein Erzeugendensystem (wegen $\overline{S}_1\,\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$) mit

$$\overline{\mathfrak{a}} \cdot \overline{\mathfrak{a}}' \equiv \overline{S}\,\varphi_p(A)\,\overline{S}' \equiv \varphi_p(\overline{S}\,A\,\overline{S}') \bmod 1.$$

Da $p^\omega \cdot A$ in Z_p liegt, ist

$$\overline{S}\,A\,\overline{S}' \equiv S\,A\,S' \bmod Z_p,$$

folglich

$$\varphi_p(\overline{S}\,A\,\overline{S}') \equiv \varphi_p(S\,A\,S') \bmod 1,$$

d.h. $\varphi_p(S\,A\,S')$ ist Verschlingungsmatrix von $\mathfrak{G}_p(A)$, und das war zu zeigen.

Insbesondere kann man für ungerades p $p^{\omega} A$ in K_p unimodular in eine ganzzahlige Diagonalmatrix überführen (Hilfssatz 1), also A selber in eine Diagonalmatrix D mit Gliedern der Form $c_i p^{-\omega_i}$, c_i ganz rational und nicht durch p teilbar. Ist (b_i) ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}_p(A)$, zu dem $\varphi_p(D) \equiv D \bmod 1$ Verschlingungsmatrix ist, so verschwindet $\sum_i \beta_i b_i$ genau dann, wenn

$$V\left(\sum_i \beta_i b_i, b_j\right) \equiv \beta_j c_j p^{-\omega_j} \equiv 0 \bmod 1,$$

d.h. wenn

$$\beta_j \equiv 0 \bmod p^{\omega_j}$$

für alle j gilt. Das bedeutet, daß das System aller b_i mit $\omega_i > 0$ eine Basis von $\mathfrak{G}_p(A)$ im Sinne von SEIFERT [8] bildet. Nun kann man die Torsionskoeffizienten und Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{G}_p(A) = \mathfrak{G}_p(D)$ unmittelbar ablesen. Wir formulieren es als Hilfssatz:

Hilfssatz 8. *Ist D eine Diagonalmatrix mit den Gliedern $c_i p^{-\omega_i}$, c_i ganz und nicht durch p teilbar, p ungerade, so sind p^{ω_i} mit $\omega_i > 0$ die Torsionskoeffizienten und $\mathfrak{v}_{p\omega} = \prod_{\omega_i = \omega} \left(\frac{c_i}{p}\right)$ mit $\omega > 0$ die Verschlingungsinvarianten von $\mathfrak{G}_p(D)$* (vgl. [7], [8]).

§ 4. Beweis des angekündigten Ergebnisses.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen: Die 1-dimensionale Homologiegruppe $\mathfrak{H}^1$ der zweifachen Überlagerung des Knotens ist die V-Gruppe $\mathfrak{G}(Q^{-1})$, wenn Q ein Repräsentant der quadratischen Form des Knotens ist. Daß umgekehrt auch die quadratische Form durch die V-Gruppe $\mathfrak{H}^1$ bestimmt ist, ergibt sich nun aus dem folgenden Satz:

Satz 3. *Zwei ganzzahlige Matrizen A, B mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{G}(A^{-1}) \cong \mathfrak{G}(B^{-1})$ ist und ungerade Ordnung hat, lassen sich durch die Operationen Q_1 und Q_2 (vgl. § 1) ineinander überführen.*

Die quadratische Form eines Knotens erhält man aus der V-Gruppe $\mathfrak{H}^1$ also folgendermaßen: Man wähle eine Verschlingungsmatrix A^{-1} von $\mathfrak{H}^1$, deren Inverse A ganz ist. Ist A nicht schon selber Matrix der quadratischen Form einer Projektion des Knotens, so läßt sie sich nach Satz 3 jedenfalls durch Q_1 und Q_2 in eine solche überführen und repräsentiert daher die quadratische Form des Knotens. In dem in der Einleitung erwähnten allgemeinen Fall läßt sich ebenso (unabhängig von der Knotentheorie) einer beliebigen V-Gruppe eine Klasse quadratischer Formen zuordnen. Man kann nämlich mit den genannten Hilfsmitteln aus [4] den Satz 3 auch ohne die Voraussetzung ungerader Ordnung beweisen und ferner zeigen, daß jede V-Gruppe — also auch eine solche die nicht zu einem Knoten gehört — eine Verschlingungsmatrix mit ganzer Inverser besitzt. Damit ist dann eine vollständige umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen V-Gruppen und den hier betrachteten Klassen quadratischer Formen hergestellt.

Beweis von Satz 3. Ist $\mathfrak{a}$ das Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}(A^{-1})$, zu dem A^{-1} Verschlingungsmatrix ist, so bildet

$$A\,\mathfrak{a} = 0 \tag{2}$$

ein System von definierenden Relationen; denn einerseits gilt

$$A\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}' \equiv A\,A^{-1} \equiv 0 \bmod 1,$$

wegen der Primitivität der Verschlingung also $A\,\mathfrak{a} = 0$, und andererseits folgt aus $\xi'\,\mathfrak{a} = 0$ für ein gewisses System ganzer Zahlen ξ

$$0 \equiv \xi'\,\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}' \equiv \xi'\,A^{-1} \bmod 1;$$

d.h. $\xi' A^{-1} = \eta'$ ist ganz und $\xi'\,\mathfrak{a} = \eta' A\,\mathfrak{a} = 0$ Folgerelation von (2). Demnach ist der Betrag von $|A|$ die Ordnung von $\mathfrak{G}(A^{-1})$. Das gleiche gilt für B, und wir entnehmen daraus: $|A|$ und $|B|$ sind ungerade und unterscheiden sich höchstens durch das Vorzeichen.

Mit Hilfe der Operation Q_2 kann man A und B in zwei Matrizen überführen, die gleiche Reihenzahl und Signatur sowie beide die Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

haben. Es wird zu keinen Mißverständnissen führen, wenn wir sie wieder mit A und B bezeichnen. Unter Berufung auf Hilfssatz 5 ist unsere Behauptung bewiesen, wenn sich A und B in jedem K_q unimodular ineinander transformieren lassen. Wir unterscheiden für diesen Nachweis drei Fälle:

I. $q = \infty$. In diesem Falle ist die Behauptung klar, da Reihenzahl und Signatur bekanntlich ein vollständiges Invariantensystem bilden.

II. $q = p =$ ungerade Primzahl. Nach Hilfssatz 1 können wir A und B in K_p unimodular auf Diagonalform transformieren, wobei Diagonalglieder $a_i\,p^{\alpha_i}$ bzw. $b_i\,p^{\beta_i}$ mit ganzen, nicht durch p teilbaren a_i, b_i und nicht negativen α_i, β_i auftreten. A^{-1} und B^{-1} sind dann in zwei Diagonalmatrizen mit den Elementen $a_i^{-1}\,p^{-\alpha_i}$ und $b_i^{-1}\,p^{-\beta_i}$ überführbar, also, da a_i, b_i Einheiten in Z_p sind, auch in solche mit den Elementen $a_i\,p^{-\alpha_i}$ bzw. $b_i\,p^{-\beta_i}$. Aus der Voraussetzung $\mathfrak{G}(A^{-1}) \cong \mathfrak{G}(B^{-1})$ folgt nach Hilfssatz 6 $\mathfrak{G}_p(A^{-1}) \cong \mathfrak{G}_p(B^{-1})$. Nach den Hilfssätzen 7 und 8 sind die p-Potenzen p^{α_i} und p^{β_i}, soweit sie positive Exponenten haben, die Torsionskoeffizienten dieser Gruppe und stimmen daher bis auf die Reihenfolge überein. Die p-Potenzen mit dem Exponenten 0 sind alle übrigen, also ist ihre Anzahl ebenfalls in beiden Matrizen die gleiche. Für $\omega > 0$ sind die Ausdrücke

$$\prod_{\alpha_i = \omega} \left(\frac{a_i}{p}\right) \quad \text{und} \quad \prod_{\beta_i = \omega} \left(\frac{b_i}{p}\right)$$

als Verschlingungsinvarianten derselben V-Gruppe einander gleich. Ferner gilt $\prod_i a_i = \prod_i b_i$ (erstreckt über alle i) wegen $|A^{-1}| = |B^{-1}|$. Demnach können

$$\prod_{\alpha_i = \omega} a_i \quad \text{und} \quad \prod_{\beta_i = \omega} b_i$$

sich für alle ω nur um einen quadratischen Faktor unterscheiden, und daraus folgt bekanntlich die unimodulare Äquivalenz der beiden Matrizen in K_p (durch Zerlegen in Teilmatrizen und Anwenden von Hilfssatz 2).

III. $q=2$. Auf Grund von I und II folgt aus Hilfssatz 4, daß A und B in K_2 ineinander transformierbar sind, und Hilfssatz 3 besagt dann, daß dies sogar unimodular möglich ist.

Literatur.

[1] Blanchfield, R. C., and R. H. Fox: Invariants of self-linking. Ann. of Math. **53**, 556 (1951). — [2] Burger, E.: Über Gruppen mit Verschlingungen. Crelles J. **188**, 193 (1950). — [3] Goeritz, L.: Knoten und quadratische Formen. Math. Z. **36**, 647 (1933). — [4] Eichler, M.: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1952. — [5] Jones, B. W.: The Arithmetic Theory of Quadratic Forms. (The Carus Mathematical Monographs Nr. 10.) New York 1950. — [6] Meyer, A.: Mathematische Mitteilungen. Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich **36**, 241 (1891). — [7] Puppe, S. D.: Minkowskische Einheiten und Verschlingungsinvarianten von Knoten. Math. Z. **56**, 33 (1952). — [8] Seifert, H.: Verschlingungsinvarianten. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., physik.-math. Kl. **26**, 811 (1933). — [9] Seifert, H.: Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen. Hamburg. math. Abh. **11**, 84 (1936).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 12. Februar 1953.)

Maass, H.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 385—390 (1953)

Über die Zurückführung der Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf Integralgleichungen.

Von
Hans Maass.

In der vorliegenden Note soll gezeigt werden, daß eine allgemeine Klasse von selbstadjungierten Eigenwertproblemen der Art

$$M[y] = \lambda N[y], \qquad U_\mu[y] = 0 \quad (1 \leq \mu \leq 2m) \tag{1}$$

auf lineare homogene Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischem Kern zurückgeführt werden kann. Dabei ist wie üblich

$$M[y] = \sum_{\nu=0}^{m} (-1)^\nu \left(f_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x)\right)^{(\nu)}, \qquad N[y] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \left(g_\nu(x)\, y^{(\nu)}(x)\right)^{(\nu)}$$

gesetzt worden, während

$$U_\mu[y] = \sum_{\nu=0}^{2m-1} \left(\alpha_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(a) + \beta_{\mu\nu}\, y^{(\nu)}(b)\right) \quad (1 \leq \mu \leq 2m)$$

unabhängige Linearformen in $y^{(\nu)}(a)$, $y^{(\nu)}(b)$ bezeichnen. Die Funktionen $f_\nu(x)$ und $g_\nu(x)$ seien im Intervall $a \leq x \leq b$ ν-mal stetig differenzierbar. Ferner sei $f_m(x) \neq 0$ für $a \leq x \leq b$ und $\lambda = 0$ kein Eigenwert von (1). Dann existiert die Greensche Funktion $G(x, \xi)$ des Randwertproblems

$$M[y] = f, \qquad U_\mu[y] = 0 \quad (1 \leq \mu \leq 2m),$$

und das Eigenwertproblem (1) ist mit der Integrodifferentialgleichung

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi)\, N[y(\xi)]\, d\xi \tag{2}$$

äquivalent.

Bei der Reduktion von (2) auf eine gewöhnliche lineare homogene Integralgleichung beschränkt man sich in der Literatur entweder auf die sog. Eingliedklasse[1]), wobei zusätzliche Voraussetzungen betreffs der Randbedingungen und n gemacht werden, oder aber man nimmt einen unsymmetrischen Kern in Kauf[2]), so daß die Frage nach der Existenz von Eigenfunktionen auf

[1]) Collatz, L.: Eigenwertprobleme und ihre numerische Behandlung, Leipzig 1945.
[2]) Buscham, W.: Die Zurückführung von speziellen linearen Integrodifferentialgleichungen auf gewöhnliche Integralgleichungen. Z. angew. Math. Mech. **32**, 20—21 (1952).

diesem Wege nicht geklärt werden kann[3]). Mit Hilfe eines einfachen Gedankens wird hier das für die Eingliedklasse entwickelte Reduktionsverfahren auf solche Eigenwertprobleme verallgemeinert, die folgende Voraussetzungen erfüllen:

1. $n < m$.

2. Es ist $g_\nu(x) > 0$ für $a \leq x \leq b$, sofern $g_\nu(x)$ nicht identisch verschwindet $(0 \leq \nu \leq n)$.

3. Genügen $u(x)$ und $v(x)$ den Randbedingungen, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\varrho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu-\varrho} u^{(\varrho)}(x) \left(g_\nu(x) v^{(\nu)}(x)\right)^{(\nu-\varrho-1)}\Big|_{x=a}^{x=b} = 0.$$

Wir dürfen also

$$N[y] = \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{n_\nu} \left(h_\nu(x) y^{(n_\nu)}(x)\right)^{(n_\nu)}, \quad 0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_r = n,$$
$$h_\nu(x) > 0 \quad \text{für} \quad a \leq x \leq b, \quad 1 \leq \nu \leq r$$

ansetzen. Diese Darstellung ist aus beweistechnischen Gründen zweckmäßig. Die dritte Forderung nimmt nun die Gestalt

$$\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} u^{(\varrho)}(x) \left(h_\nu(x) v^{(n_\nu)}(x)\right)^{(n_\nu-\varrho-1)}\Big|_{x=a}^{x=b} = 0 \tag{3}$$

an. Da die Funktionen

$$u(x) = G(x, \xi), \qquad v(x) = \frac{\partial^{n_\mu} G(x, \eta)}{\partial \eta^{n_\mu}}$$

bekanntlich den Randbedingungen genügen, wenn ξ und η im offenen Intervall (a, b) fest gewählt werden, so können wir zunächst einmal

$$\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1} (-1)^{n_\nu-\varrho} \frac{\partial^\varrho G(x, \xi)}{\partial x^\varrho} \frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial x^{n_\nu-\varrho-1}} \left(h_\nu(x) \frac{\partial^{n_\nu+n_\mu} G(x, \eta)}{\partial x^{n_\nu} \partial \eta^{n_\mu}}\right)\Big|_{x=a}^{x=b} = 0 \tag{4}$$

identisch in $a < \xi, \eta < b$ notieren.

---

[3]) N. J. LEHMANN [Math. Nachr. **5**, 139—160 (1951)] hat bereits allgemeine Eigenwertprobleme mit den Methoden der Integralgleichungstheorie behandelt. Doch handelt es sich dabei nicht um eine Reduktion auf reine Integralgleichungen; vielmehr wird gezeigt, daß die E. SCHMIDTsche Integralgleichungstheorie auf gewisse Arten von Integrodifferentialgleichungen, wie man sie aus (2) durch partielle Integrationen gewinnt, verallgemeinert werden kann. Hinsichtlich der Bedeutung, die den Untersuchungen von E. HÖLDER in diesem Zusammenhang zukommt, sei auf LEHMANN l. c. Fußnote [3]) hingewiesen. Schließlich sei noch bemerkt, daß die in der vorliegenden Note erzielten Ergebnisse über die Existenz von Eigenfunktionen mühelos aus einem allgemeinen Satz von H. WIELANDT [Math. Nachr. **4**, 308—314 (1950/51)] abgeleitet werden können, wenn man dort das Skalarprodukt (y, z) durch

$$(y, z) = \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(x) y^{(\nu)}(x) \bar{z}^{(\nu)}(x)\, dx$$

und die Operation $y = L z$ durch

$$M[y] = N[z], \qquad U_\mu[y] = 0 \quad (1 \leq \mu \leq 2m)$$

erklärt.

Die Integrodifferentialgleichung (2) wird nun in ein homogenes System von gewöhnlichen Integralgleichungen übergeführt. Beachtet man, daß (3) für $u(\xi) = G(x, \xi)$, $v(\xi) = y(\xi)$ gilt, wenn $y(\xi)$ eine Eigenfunktion darstellt und x im Intervall (a, b) fest gewählt wird, so erhält man aus (2) durch partielle Integration

$$y(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b \frac{\partial^{n_\nu} G(x, \xi)}{\partial \xi^{n_\nu}} h_\nu(\xi)\, y^{(n_\nu)}(\xi)\, d\xi. \tag{5}$$

Die n_μ-te Ableitung nach x kann hier wegen $n < m$ formal unter dem Integralzeichen gebildet werden. Für die Funktionen

$$\varphi_\mu(x) = \sqrt{h_\mu(x)}\, y^{(n_\mu)}(x) \quad (1 \leq \mu \leq r) \tag{6}$$

ergibt sich so das Integralgleichungssystem

$$\varphi_\mu(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b \frac{\partial^{n_\mu + n_\nu} G(x, \xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu}} \sqrt{h_\mu(x)\, h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi. \tag{7}$$

Sehen wir μ als eine mit x gleichberechtigte (diskrete) Variable und die Summation über ν als eine besondere Art der Integration an, so läßt sich das System (7) auch als eine einzige Integralgleichung auffassen. Ihr Kern

$$K(\mu, x; \nu, \xi) = \frac{\partial^{n_\mu + n_\nu} G(x, \xi)}{\partial x^{n_\mu} \partial \xi^{n_\nu}} \sqrt{h_\mu(x)\, h_\nu(\xi)} \tag{8}$$

ist wegen $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ symmetrisch:

$$K(\mu, x; \nu, \xi) = K(\nu, \xi; \mu, x).$$

Folglich läßt sich die von E. Schmidt entwickelte Theorie[4]) auf das System (7) vollständig übertragen. Insbesondere ist folgendes festzustellen: Alle Eigenwerte λ von (7) sind reell und liegen diskret; es gibt mindestens einen. Bilden $\varphi_{1\mu}(x), \varphi_{2\mu}(x), \varphi_{3\mu}(x), \ldots$ ein vollständiges System von reellen, orthogonalen und normierten Eigenfunktionen:

$$\sum_{\mu=1}^{r} \int_a^b \varphi_{k\mu}(x)\, \varphi_{l\mu}(x)\, dx = \delta_{kl} \quad (= \text{Kroneckersymbol})$$

und wird $\chi_\mu(x)$ durch den Kern mit stetigem $\omega_\nu(\xi)$ dargestellt:

$$\chi_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b K(\mu, x; \nu, \xi)\, \omega_\nu(\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

so gilt mit konstanten c_k eine Entwicklung der Art

$$\chi_\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_{k\mu}(x), \tag{10}$$

die im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gleichmäßig konvergiert.

[4]) Schmidt, E.: Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen I. Math. Ann. **63**, 433—476 (1907).

Umgekehrt ist jetzt zu zeigen, daß jeder Lösung $\varphi_\mu(x)$ des Systems (7) auch eine Lösung $y(x)$ der Integrodifferentialgleichung (2) in der angegebenen Weise entspricht. Zufolge (5) und (6) ist

$$y(x) = \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \int_a^b \frac{\partial^{n_\nu} G(x,\xi)}{\partial \xi^{n_\nu}} \sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi)\, d\xi \tag{11}$$

anzusetzen. Um hier gewisse partielle Integrationen ausführen zu können, müssen wir zunächst beweisen, daß $\varphi_\mu(x)$ nach x n_μ-mal stetig differenziert werden kann. Da $\frac{\partial^{\varrho+\sigma} G(x,\xi)}{\partial x^\varrho\, \partial \xi^\sigma}$ für $\varrho+\sigma \leqq 2m-2$ in $a \leqq x,\ \xi \leqq b$ und für $\varrho \leqq 2m$, $\sigma \leqq 2m$ in den Teilbereichen $a \leqq x < \xi \leqq b$ und $a \leqq \xi < x \leqq b$ gleichmäßig stetig ist, so folgt aus (7), daß $\varphi_\mu(x)$ jedenfalls einmal stetig differenzierbar ist. Setzen wir $\mathrm{Min}(n_\nu, \varrho) = \varrho_\nu$ für eine natürliche Zahl ϱ und nehmen an, $\varphi_\nu(x)$ sei ϱ_ν-mal stetig differenzierbar, so liefert partielle Integration

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(x) = {} & \lambda \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{\varrho_\nu} \int_a^b \frac{\partial^{n_\mu - n_\nu - \varrho_\nu} G(x,\xi)}{\partial x^{n_\mu}\, \partial \xi^{n_\nu - \varrho_\nu}} \sqrt{h_\mu(x)} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi) \right)^{(\varrho_\nu)} d\xi + \\ & + \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\sigma=0}^{\varrho_\nu - 1} (-1)^\sigma \frac{\partial^{n_\mu + n_\nu - \sigma - 1} G(x,\xi)}{\partial x^{n_\mu}\, \partial \xi^{n_\nu - \sigma - 1}} \sqrt{h_\mu(x)} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi) \right)^{(\sigma)} \Big|_{\xi=a}^{\xi=b}, \end{aligned} \tag{12}$$

woraus zu ersehen ist, daß $\varphi_\mu(x)$ auch $(\varrho+1)_\mu$-mal stetig differenzierbar ist; denn es ist

$$\begin{aligned} (\varrho+1)_\mu + n_\mu + n_\nu - \varrho_\nu &= \mathrm{Min}(\varrho+1, n_\mu) - \mathrm{Min}(\varrho, n_\nu) + n_\mu + n_\nu \\ &\leqq \varrho + 1 - \mathrm{Min}(\varrho, n_\nu) + n_\mu + n_\nu = \mathrm{Max}(\varrho + 1 + n_\mu, n_\mu + n_\nu + 1) \\ &\leqq 2n_\nu + 1 \leqq 2m - 1, \end{aligned}$$

wenn $\varrho \leqq n_\nu$ angenommen wird. Vollständige Induktion nach ϱ zeigt schließlich, daß $\varphi_\mu^{(n_\mu)}(x)$ existiert und stetig ist.

Mit Hilfe partieller Integrationen können wir nun (11) in

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \lambda \int_a^b G(x,\xi) \sum_{\nu=1}^{r} (-1)^{n_\nu} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi) \right)^{(n_\nu)} d\xi - \\ & - \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu - 1} (-1)^{n_\nu - \varrho - 1} \frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial \xi^\varrho} \frac{\partial^{n_\nu - \varrho - 1}}{\partial \xi^{n_\nu - \varrho - 1}} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi) \right) \Big|_{\xi=a}^{\xi=b} \end{aligned} \tag{13}$$

überführen. Andererseits folgt aus (11) mit Hilfe von (7) sofort (6) und damit

$$\begin{aligned} y(x) = {} & \lambda \int_a^b G(x,\xi)\, N[y(\xi)]\, d\xi - \\ & - \lambda \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\varrho=0}^{n_\nu - 1} (-1)^{n_\nu - \varrho - 1} \frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial \xi^\varrho} \frac{\partial^{n_\nu - \varrho - 1}}{\partial \xi^{n_\nu - \varrho - 1}} \left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\, \varphi_\nu(\xi) \right) \Big|_{\xi=a}^{\xi=b}, \end{aligned} \tag{14}$$

so daß nur noch das Verschwinden dieser Doppelsumme gezeigt zu werden braucht. Mit Hilfe von (7) erhält man in der Tat

$$(15)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial\xi^\varrho}\,\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(\sqrt{h_\nu(\xi)}\,\varphi_\nu(\xi)\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b} \\ = \lambda\displaystyle\sum_{\mu=1}^{r}\int_a^b\left\{\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial\xi^\varrho}\,\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(h_\nu(\xi)\frac{\partial^{n_\nu+n_\mu}G(\xi,\eta)}{\partial\xi^{n_\nu}\,\partial\eta^{n_\mu}}\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}\right\}\times \\ \quad\times\sqrt{h_\mu(\eta)}\,\varphi_\mu(\eta)\,d\eta = 0 \end{cases}$$

für $a<x<b$; denn die Doppelsumme in der geschweiften Klammer verschwindet identisch in $a<x,\ \eta<b$. Das folgt aus (4), wenn man hierin x mit ξ vertauscht. Die Äquivalenz von (2) und (7) ist damit bewiesen.

Wir wollen noch kurz feststellen, in welcher Weise sich der Hilbertsche Entwicklungssatz (10) auf die Integrodifferentialgleichung überträgt. Es bezeichne $w(x)$ eine Vergleichsfunktion; sie ist also $2m$-mal stetig differenzierbar und genügt den Randbedingungen. Wir setzen $M[w]=f$ und bestimmen v aus $N[v]=f$. Dann ist

$$(16)\qquad w(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,N[v(\xi)]\,d\xi.$$

Für die n_μ-te Ableitung von $w(x)$ ergibt sich nach partiellen Integrationen

$$(17)\quad \begin{cases} \sqrt{h_\mu(x)}\left\{w^{(n_\mu)}(x)-\displaystyle\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^{n_\mu+\varrho}G(x,\xi)}{\partial x^{n_\mu}\,\partial\xi^\varrho}\,\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(h_\nu(\xi)\,v^{(n_\nu)}(\xi)\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}\right\} \\ \qquad=\displaystyle\sum_{\nu=1}^{r}\int_a^b K(\mu,x;\nu,\xi)\,\omega_\nu(\xi)\,d\xi \end{cases}$$

mit

$$(18)\qquad \omega_\nu(\xi)=\sqrt{h_\nu(\xi)}\,v^{(n_\nu)}(\xi).$$

Der Eigenfunktion $\varphi_{k\mu}(x)$ von (7) möge die Eigenfunktion $y_k(x)$ von (2) entsprechen. Zufolge (6) ist

$$(19)\qquad \varphi_{k\mu}(x)=\sqrt{h_\mu(x)}\,y_k^{(n_\mu)}(x).$$

Der Hilbertsche Entwicklungssatz liefert nun gleichmäßig konvergente Entwicklungen der Art

$$(20)\qquad \sum_{\nu=1}^{r}\int_a^b K(\mu,x;\nu,\xi)\,\omega_\nu(\xi)\,d\xi=\sqrt{h_\mu(x)}\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,y_k^{(n_\mu)}(x).$$

n_1-malige Integration der für $\mu=1$ aus (17) und (20) resultierenden Identität ergibt schließlich

$$(21)\quad \begin{cases} w(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}c_k\,y_k(x)+\sum_{\varrho=0}^{n_1-1}d_\varrho\,x^\varrho+ \\ \qquad+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\varrho=0}^{n_\nu-1}(-1)^{n_\nu-\varrho}\frac{\partial^\varrho G(x,\xi)}{\partial\xi^\varrho}\,\frac{\partial^{n_\nu-\varrho-1}}{\partial\xi^{n_\nu-\varrho-1}}\left(h_\nu(\xi)\,v^{(n_\nu)}(\xi)\right)\Big|_{\xi=a}^{\xi=b}. \end{cases}$$

Wie bekannte Beispiele zeigen, kann ohne zusätzliche Voraussetzung nicht erwartet werden, daß stets

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x) \tag{22}$$

gilt. Beweisbar ist (22), wenn unter den Randbedingungen die Bedingungen

$$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = 0 \tag{23}$$

vorkommen. Dann ist nämlich

$$\frac{\partial^\varrho G(x, a)}{\partial a^\varrho} = 0 \quad \text{für} \quad a < x \leqq b, \quad 0 \leqq \varrho < n_r,$$

während

$$v^{(\nu)}(b) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leqq \nu < 2n_r$$

durch geeignete Wahl von ν erreicht werden kann. Die Doppelsumme in (21) verschwindet also identisch. Bildet man nun noch die Ableitungen von $w(x)$ an der Stelle $x = a$ bis zur $(n_1 - 1)$-ten Ordnung, so folgt bei Berücksichtigung der Randbedingungen auch noch $d_\varrho = 0$ für $0 \leqq \varrho < n_1$.

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 10. Februar 1953.)

Neumer, W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 391—413 (1953)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. I.

Von
Walter Neumer.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Abhandlung ist aus dem Versuch entstanden, ein Bezeichnungssystem zu finden, welches auch für beliebige, d.h. nicht abzählbare Ordnungszahlen die Entwicklung eines „Algorithmus" gestattet, der von einer gegebenen Normalfunktion aus möglichst weit in die Stufenfolge der zugehörigen höheren Normalfunktionen und ihrer kritischen Zahlen hineinführt und dabei jedes Stadium durch eine bestimmte Zeichenfigur wiedergibt, die unter Umständen noch Variable für Normalfunktionen oder Ordnungszahlen enthält. Dieses Problem hängt engstens zusammen mit der konstruktiven Erfassung eines möglichst großen Abschnitts der zweiten Zahlenklasse, woran auch die mathematische Logik interessiert ist.

In dem vorgelegten Teil I wird zunächst ein konstruktives Bezeichnungssystem für einen Abschnitt der zweiten Zahlenklasse entwickelt, dessen Grenzzahl provisorisch die Bezeichnung $1VII'I''\ldots$ erhält. Im Teil II soll gezeigt werden, daß die so gewonnenen Symbole auch in Verbindung mit beliebigen Ordnungszahlen und Normalfunktionen benützt werden können.

Der hier dargestellte Algorithmus kann sinngemäß über den durch $1VII'I''\ldots$ bestimmten Abschnitt hinaus fortgesetzt werden, und es scheint schwierig, eine Grenze dieses Prozesses abzusehen; die Übertragung auf beliebige Ordnungszahlen und Normalfunktionen bleibt dabei beständig möglich[1]). Bevor dieses Thema behandelt wird, soll noch im Teil II das in Teil I beschriebene Bezeichnungssystem mit dem von W. Ackermann[2]) angegebenen Bezeichnungssystem verglichen werden, wobei sich herausstellt, daß die Grenzzahl der Gesamtheit der Ackermannschen n-stelligen ($n=3, 4, \ldots$) Klammersysteme in dem hier geschilderten System die Zahl $1VII'^{1V}$ ist.

1. Abschnitt.

Die Konstruktion der Ordnungszahlen bis $1VII'I''\ldots.$

§ 1. Allgemeine Konstruktionsregeln.

1. Eine Ordnungszahl oder kurz Zahl soll in diesem Abschnitt eine — im allgemeinen „zweidimensionale" — Figur aus endlich vielen „Einzelzeichen"

(1) $$1,\ +,\ (),\ V,\ I,\ I',\ I'',\ I''',\ I'''',\ldots$$

[1]) Notizen hierüber liegen seit 1947 vor.

[2]) Konstruktiver Aufbau eines Abschnitts der zweiten Cantorschen Zahlenklasse. Math. Z. **53**, 403—413 (1951).

sein[3]), welche nach bestimmten Regeln, unter anderem mit Verwendung der Potenzschreibweise[4]) aus der Figur 1 abgeleitet ist. Der Sinn des Begriffes „Ableitung" wird im Verlauf dieses Paragraphen näher präzisiert werden. Einstweilen sei mit vorstehender Erklärung festgestellt, daß „Ableitung einer Figur α aus der Figur 1" einen Prozeß bedeutet, in dessen Verlauf zu der Figur 1 gewisse Zeichen (1) oder Gruppen von solchen nach gewissen Regeln hinzugefügt bzw. durch andere solche Zeichen oder Zeichengruppen ersetzt werden.

Die Klammern ( ) dienen als Hilfszeichen zur Zusammenfassung und Abgrenzung von Zeichengruppen. Wir übernehmen in unser Bezeichnungssystem die natürlichen Zahlen als Ordnungszahlen in der Form 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, ... mit den üblichen Abkürzungen 2, 3, 4, ... Dagegen nicht als Abkürzungen, sondern als völlig gleichwertig mit I'''', I''''', ... wollen wir die einfacheren Zeichen $I^{(4)}$, $I^{(5)}$, ... ansehen, die nicht zu verwechseln sind mit den später auftretenden Figuren I^4, I^5, ...

Als Variablenzeichen für natürliche Zahlen bzw. beliebige Ordnungszahlen verwenden wir kleine lateinische bzw. griechische Buchstaben, wobei wir nach Bedarf die natürlichen Zahlen als Indizes benützen. $1 + 1 + \cdots + 1$ und ähnliche Figuren sollen Schemata für natürliche Zahlen darstellen, $I^{(n)}$ ein Schema für ein I mit $n\,(>1)$ Strichen.

Eine Ordnungszahl nennen wir auch eine *Zahlenfigur*. Gewisse Teilfiguren von Zahlenfiguren nennen wir *Operatoren*. Operatoren sind $V, I, I', I'', \ldots$ sowie gewisse aus diesen Zeichen mittels ( ) gebildete Figuren, wobei bereits konstruierte Ordnungszahlen als „Exponenten" auftreten können. Variablenzeichen für beliebige Figuren (Zahlen oder Operatoren) sollen große lateinische Buchstaben sein (außer V und I); auch hier verwenden wir die natürlichen Zahlen als Indizes.

Wir teilen die ständig im selben Sinne verwendeten individuellen Figuren (Zahlen und Operatoren) nach zwei Gesichtspunkten in je zwei Klassen ein. Erstens in *vollständige Figuren* und *feste Abkürzungen*, zweitens in *reguläre Figuren* und *Hilfsfiguren*. Demgemäß ergibt sich eine Vierteilung des Figurenbereichs in vollständige reguläre Figuren, vollständige Hilfsfiguren, abgekürzte reguläre Figuren und abgekürzte Hilfsfiguren. Statt vollständig regulär sagen wir kürzer *vollregulär*. Vollreguläre Figuren sind unter anderem 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, ..., regulär und feste Abkürzungen sind z. B. die üblichen Ziffern 2, 3, ... und die aus ihnen in üblicher Weise gebildeten Zahlzeichen 10, 11, ... Die sonstigen (voll)regulären Figuren zu definieren ist der Zweck dieses Abschnitts.

Die Hilfsfiguren dienen zur leichteren Handhabung unseres *Algorithmus*, mit welchem Wort wir die Technik der Ableitung von (voll)regulären Zahlenfiguren meinen. Die Aussagen, eine Zahl α sei „abgeleitet", „konstruiert" oder „gebildet" oder sie „komme im Algorithmus vor" u. ä., werden im

[3]) Ausnahmen s. Fußnote [6]).

[4]) Die „Potenzierung" könnte natürlich auch durch ein besonderes Zeichen anstatt durch Rechts-hoch-Stellung ausgedrückt werden, aber das würde die Übersicht erschweren.

folgenden synonym gebraucht, wenn wir auch die Bezeichnung Ableitung als die eigentlich zuständige ansehen wollen. Insbesondere werden wir auch von der Ableitung einer Zahl aus 1 oder einer anderen Zahl sprechen.

In definierenden Gleichungen[5]) kennzeichnen wir die regulären Figuren durch Unterstreichen. Wo nichts Besonderes gesagt ist, geht es aus dem Zusammenhang hervor, ob eine Figur regulär ist oder nicht.

Sind F_1 und F_2 zwei im Algorithmus auftretende Figuren (Zahlen oder Operatoren), so bedeutet $F_1 = F_2$ entweder die Identität, d.h. die figürliche Einerleiheit, oder es bedeutet, daß etwa F_1 eine Abkürzung oder sonstige Ersatzform oder eine Hilfsfigur für F_2 ist oder daß F_1 und F_2 durch je eine endliche Kette von Gleichungen mit einer Figur F_3 verknüpft sind, wobei jede Gleichung dieser Kette eine der zuerst genannten Bedeutungen hat. $F_1 \neq F_2$ soll die Negation von $F_1 = F_2$ ausdrücken.

2. Um die Darlegung des in anschaulichen Analogieschlüssen fortschreitenden Algorithmus nicht mit ständigen Wiederholungen zu belasten, geben wir teilweise vorgreifend eine Reihe von Eigenschaften und Prinzipien des Algorithmus an, die erst auf Grund der konkreten Entwicklungen des § 2 als richtig bzw. sinnvoll erscheinen werden. Es ist also erforderlich, daß man die jetzt und in den weiteren Ziffern dieses Paragraphen folgenden Bemerkungen bei späteren Ausführungen wieder vor Augen habe, um zu prüfen, ob die genannten Eigenschaften und Rezepte tatsächlich bestätigt bzw. befolgt werden.

Zunächst bedeutet $F_1 = F_2$ immer die Identität, wenn F_1 und F_2 vollregulär sind.

Sind ferner α und β zwei nicht identische vollständige Zahlenfiguren in regulärer oder in Hilfsform, so kann entweder β aus α oder α aus β abgeleitet werden. Zu jeder vollständigen regulären Zahlenfigur α gibt es, wenn überhaupt, so nur endlich viele gleiche vollständige Hilfsfiguren $\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n = \underline{\alpha}$, die nach gewissen Regeln bei der Ableitung von α auftreten. γ_1 erscheint zuerst (die *erste* Hilfsfigur $= \alpha$), wird dann ersetzt durch γ_2 usw. und zuletzt γ_n durch α. Auch diese Übergänge bezeichnen wir als Ableitungen. Aus einer vollregulären Zahlenfigur wird somit niemals eine ihr gleiche Hilfsfigur abgeleitet.

Entsprechend gibt es zu jedem Operator X in vollregulärer Form, wenn überhaupt, so eine endliche Reihe gleicher Operatoren $Y_1 = \cdots = Y_n = X$ in vollständiger Hilfsform. Dabei muß X in einer vollregulären Zahlenfigur α auftreten und die Y_i in gewissen vollständigen Hilfsfiguren $\gamma_i = \alpha$.

Natürlich gibt es zu jedem vollständigen, aus den Zeichen (1) gebildeten Komplex (Zahlenfigur oder Operator) auch nur endlich viele feste Abkürzungen. Sie entstehen, indem man in dem betreffenden Komplex auftretende natürliche Zahlen $1 + 1 + \cdots + 1$ durch die ihnen gleichen dekadischen Zahlzeichen ersetzt und eventuell noch gewisse ( )-Zeichen wegläßt (vgl. die Koeffizientenregel in Ziffer **5**).

[5]) Auch wenn sie schematischer und nicht individueller Natur sind.

Wenn die Ordnungszahl β aus der bereits abgeleiteten Ordnungszahl $\alpha \neq \beta$ abgeleitet werden kann, so sagen wir, α sei *kleiner* als β oder β *größer* als α, in Zeichen: $\alpha < \beta$ oder $\beta > \alpha$. Wenn $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, so ist auch $\alpha' < \beta'$ oder $\beta' > \alpha'$. — Wenn $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$ ist, so wird damit eine Ableitung von γ aus α (mit dem Zwischenstadium β) geliefert, d.h. es gilt $\alpha < \gamma$. — Wenn $\alpha \neq \beta$, so ist nach Absatz 3 dieser Ziffer entweder $\alpha < \beta$ oder $\beta > \alpha$. Dieser für den Algorithmus wesentliche Sachverhalt kommt folgendermaßen zustande. Die Aussage, γ sei abgeleitet, wird immer nur auf Grund der Einsicht gemacht werden, daß zu γ die Klasse der algorithmisch möglichen Zahlenfiguren festgelegt ist, aus denen γ abgeleitet werden kann und daß dabei, wenn α und β zwei nicht identische Zahlen dieser Klasse sind, entweder β aus α oder α aus β ableitbar ist. — Der Ableitungsprozeß verläuft demnach *einseitig*; das kommt später zum Ausdruck in der „Links-rechts-Struktur" der Zahlenfiguren. — Die Vergleichbarkeit zweier Zahlen hinsichtlich der Relationen $=$ und $<$ gilt also immer für die Zahlen einer gewissen Klasse, und da wir den Algorithmus in der Gestalt von Folgen solcher wachsender Klassen entwickeln, *sind alle Zahlen vergleichbar* (natürlich im Sinn einer endlichen Rekursion).

3. Nun geben wir einige allgemeine Ableitungs-Regeln und -Prinzipien an.

I. *Konstruktionsprinzip. Die Ableitung einer Ordnungszahl β aus einer Ordnungszahl $\alpha \neq \beta$ erfolgt stets so, daß zunächst α, wenn sie eine Hilfsfigur oder eine abgekürzte reguläre Figur ist, in die ihr gleiche vollreguläre Figur umgeformt (gedacht) wird.* — Dafür sagen wir auch: *Es darf nur von vollregulären Figuren aus weiterkonstruiert werden.*

II. *Konstruktionsprinzip. Von jeder konstruierten Zahl α aus beginnt die Konstruktion wieder von vorne, d.h. es wird zunächst weiterkonstruiert mit denselben Mitteln in derselben Reihenfolge, wie sie während der Konstruktion von α bereits verfügbar waren.*

Diese Prinzipien werden angewandt bei der Handhabung der beiden folgenden Regeln zur Bildung neuer Zahlen.

Nachfolgerbildung. Ist α bereits konstruiert, und zwar in vollregulärer Form, so ist auch $\alpha + 1$ eine Ordnungszahl in vollregulärer Form, die wir den *Nachfolger* von α nennen (natürlich hat man α durch die entsprechende vollreguläre Figur ersetzt zu denken, in deren „Grundzeile" $+1$ rechts angefügt wird). $\alpha + 1$ gilt dann als von α abgeleitet (vgl. **4**), also $\alpha + 1 > \alpha$. — *Für die Zahlen $\alpha + 1$ gibt es keine Hilfsfiguren.*

Limesbildung. Zu gewissen gesetzmäßig konstruierbaren Folgen α_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) wachsender Ordnungszahlen in regulärer Form definieren wir eine Ordnungszahl nach dem Schema

$$\lim_n \alpha_n \quad \text{oder} \quad \lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}, \tag{2}$$

die wir den *Limes* der *Fundamentalfolge* α_n nennen und die als aus jedem α_n abgeleitet gelten soll (vgl. **4**). Beide Schemata (2) sind in Formeln untereinander auswechselbar. — Es ist also

$$\lim_n \alpha_n > \alpha_m \quad \text{für} \quad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3}$$

$\lim\limits_{n} \alpha_n$ oder $\lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ sind *erste* Hilfsfiguren (vgl. 2, 3. Absatz)[6]), die wir nach bestimmten Regeln (unter Umständen sukzessive durch andere Hilfsfiguren aus den Zeichen (1) und zuletzt) durch eine reguläre Figur λ ersetzen. Wir nennen λ einen *Anfangsfall* oder eine *Limeszahl*, ebenso die ihr gleichen Hilfsfiguren. In der Figur $\lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ werden so viele α_i hingeschrieben, daß das Bildungsgesetz der α_i sichtbar wird (praktisch werden immer die ersten drei Glieder genügen); unter dieser Voraussetzung gelten Figuren mit verschiedenen Anzahlen hingeschriebener Glieder derselben Fundamentalfolge nicht als verschieden. Auch die Figuren $\lim\limits_{n} \alpha_n$ und $\lim \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ wollen wir nicht als verschieden betrachten, sofern die erste (ohne ad hoc eingeführte, nicht feste Abkürzungen) gebildet werden kann. Es soll auch nicht darauf ankommen, ob die α_i in vollregulärer oder in abgekürzter regulärer Form erscheinen. — Natürlich dürfen wir n durch andere kleine lateinische Buchstaben ersetzen.

Jede vollreguläre Zahlenfigur unseres Algorithmus außer 1 hat entweder die Form $\underset{\sim}{\lambda} = \lim\limits_{n} \alpha_n$ oder $\alpha + 1$, d. h. jede Ableitung einer Zahl enthält zum Schluß entweder den Übergang $\alpha \to \alpha + 1$ oder $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \to \lim\limits_{n} \alpha_n \to \lambda$.

4. Eine wesentliche Aufgabe wird es sein, zugleich mit der Entwicklung des Algorithmus nachzuweisen, daß die transfinite Induktion in ihm gilt. Damit ist folgendes gemeint. Sei $\mathfrak{A}(\alpha)$ eine Aussage, in der eine Variable α für Ordnungszahlen auftritt und die folgende Eigenschaften hat.

$$(4)\quad \begin{cases} 1.\ \mathfrak{A}(1) \text{ ist richtig.} \\ 2.\ \alpha = \beta \wedge \mathfrak{A}(\alpha) \Rightarrow \mathfrak{A}(\beta). \qquad (\beta \text{ aus } \alpha \text{ ableitbar.}) \\ 3.\ \mathfrak{A}(\alpha) \Rightarrow \mathfrak{A}(\alpha + 1). \\ 4.\ (\mathfrak{A}(\alpha_n)_{n=1,2,3,\ldots}) \Rightarrow \mathfrak{A}\left(\lim\limits_{n} \alpha_n\right). \end{cases}$$

Wenn dann $\mathfrak{A}(\alpha)$ immer richtig ist, sagen wir, daß im Algorithmus die transfinite Induktion gilt. $\mathfrak{T}(\alpha)$ sei die Aussage: „Die transfinite Induktion gilt bis zu α einschließlich hin." Dann ist $\mathfrak{T}$ ein $\mathfrak{A}$ mit den Eigenschaften (4) und überdies ein $\mathfrak{A}$ mit der weiteren Eigenschaft

$$(5)\quad \mathfrak{A}(\alpha) \Rightarrow (\mathfrak{A}(\beta)_{\beta \leq \alpha}). \qquad (\alpha \text{ aus } \beta \text{ ableitbar.})$$

Wenn es gelingt, zugleich mit der Ableitung von α aus 1 die Aussage $\mathfrak{T}(\alpha)$ aus der trivialerweise richtigen Aussage $\mathfrak{T}(1)$ herzuleiten, so ist die Richtigkeit von $\mathfrak{T}(\alpha)$ nachgewiesen.

Es ist aber nicht nötig, bei diesem Nachweis mit der allgemeinen Aussage $\mathfrak{T}(\alpha)$ zu arbeiten, sondern $\mathfrak{T}(\alpha)$ darf durch jede spezielle Aussage $\mathfrak{A}(\alpha)$ ersetzt werden, welche die Eigenschaften (4) und (5) besitzt. Eine solche Aussage

[6]) Wir lassen also noch individuelle Zahlenfiguren zu, in denen außer den Zeichen (1) noch das Zeichen lim auftritt sowie eine Variable für natürliche Zahlen oder die Zeichen „,", { } und das Rekursionszeichen „ ...".

ist nun: „Die Ordnungszahl α ist ableitbar", die wir jetzt mit $\mathfrak{A}(\alpha)$ bezeichnen. Die Ableitbarkeit ist dabei im Sinne von **2**, letzter Absatz, zu verstehen.

Daß $\mathfrak{A}(1)$ richtig ist, ist klar. Ebenso liegt auf der Hand, daß (4, 2) zutrifft. Hat man ferner von 1 aus die Zahl α durch fortgesetzte Ableitungen gewonnen, dann gibt es in diesem Stadium des Algorithmus außer α keine anderen algorithmisch möglichen, d.h. ableitbaren Zahlenfiguren β als solche, aus denen α abgeleitet werden kann. Also gilt (5). Wollen wir vom vollregulären α aus weiterkonstruieren, so können wir das nach dem II. Konstruktionsprinzip zunächst nur durch den Übergang zu $\alpha+1$ tun. Somit gilt (4, 3). — Sind wir ferner zu der Fundamentalfolge $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ fortgeschritten, dann gibt es in diesem Stadium außer den α_i nur solche algorithmisch mögliche, d.h. ableitbare Zahlenfiguren β, aus denen ein α_m abgeleitet werden kann. Wegen (3) ist die Klasse dieser β einschließlich der α_i identisch mit der Klasse derjenigen β, aus denen sich $\lim\limits_n \alpha_n$ ableiten läßt; denn andere Zahlen, aus denen $\lim\limits_n \alpha_n$ ableitbar wäre, sind nicht erklärt. Somit gilt (5), wenn α durch $\lim\limits_n \alpha_n$ ersetzt wird, und die Klasse der Zahlen $\beta < \lim\limits_n \alpha_n$ ist festgelegt. Ist endlich $\beta_1 < \lim\limits_n \alpha_n$, $\beta_2 < \lim\limits_n \alpha_n$, so bedeutet dies nach dem soeben Gesagten, daß sich zwei natürliche Zahlen m_1, m_2 mit $\beta_1 < \alpha_{m_1}$, $\beta_2 < \alpha_{m_2}$ angeben lassen; somit ist $\beta_1 < \alpha_m$, $\beta_2 < \alpha_m$ für $m = \max(m_1, m_2)$. Wegen der Ableitbarkeit von α_m sind daher β_1 und β_2, falls nicht identisch, vergleichbar. Also gilt auch (4, 4) für unser spezielles $\mathfrak{A}$.

Die Entwicklung des Algorithmus besteht in der Ableitung immer größerer Zahlen α, d.h. in der Herbeiführung von Aussagen $\mathfrak{A}(\alpha)$ für immer größere α. Somit gilt wegen (5) $\mathfrak{A}(\alpha)$ für alle algorithmisch erfaßbaren Zahlen und damit auch $\mathfrak{T}(\alpha)$.

Die vorstehenden Ausführungen sollen natürlich noch kein Beweis für die Gültigkeit der transfiniten Induktion sein, sondern nur ein Programm, nach welchem die Realisierung dieses Beweises an Hand der Entwicklung des Algorithmus (§ 2, **2**) festzustellen ist.

Nach dem II. Konstruktionsprinzip stellen sich $\alpha - 1$ und $\lim\limits_n \alpha_n$ als die kleinsten Zahlen dar, welche $> \alpha$ bzw. größer als jedes α_m sind. Bezüglich $\alpha+1$ ist dies klar. Zu der Klasse aller α_i und aller $\beta \leqq \alpha_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ wird durch die Definition (2) eine neue Zahl $\lim\limits_n \alpha_n$ hinzugefügt und von der ihr gleichen vollregulären Zahl λ aus (I. Konstruktionsprinzip) beginnt dann die Konstruktion von vorne (II. Konstruktionsprinzip), d.h. alle neu hinzukommenden Zahlen $\lambda+1$ usw. sind $> \lambda$, also $> \lim\limits_n \alpha_n$.

Wir heben noch einmal hervor, daß $\beta < \lim\limits_n \alpha_n$ die Nennbarkeit eines $\alpha_m > \beta$ bedeutet.

Eine wichtige Aussage mit den Eigenschaften (4) und (5) ist: „*Von jedem α aus gibt es nur endliche Regresse* $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k > 1$", welche die Menge aller Zahlen $< \alpha$ (man beschränke sich auf die vollregulären Zahlenfiguren) als „wohlgeordnet" ausweist.

5. Die erste vollreguläre Limeszahl definieren wir durch

$$\underline{1V} = \lim\{1, 2, 3, \ldots\} = \lim_n n. \tag{6}$$

Die Zahlen $\geqq 1V$ nennen wir transfinit. Im Algorithmus spielen diejenigen transfiniten Zahlenfiguren aus den Zeichen (1) (das sind die Zahlenfiguren aus den Zeichen (1), in denen V wirklich vorkommt) eine besondere Rolle, bei denen, wenn sie in vollständiger Form geschrieben werden, in der Grundzeile kein —-Zeichen auftritt, d.h. bei denen +-Zeichen höchstens in Exponenten auftreten; wir nennen sie *Hauptzahlen*. Sie sind stets Limeszahlen.

Wir geben jetzt einige figürliche Schemata an, nach denen wir in der Folge neue Zahlenfiguren aus bereits verfügbaren konstruieren.

$$(\mathfrak{A}) \quad \begin{cases} (1) & \underline{\varphi(n+1)} = \varphi n + \varphi = \lim\limits_m (\varphi n + \gamma_m), \text{ wo } \varphi = \lim\limits_m \gamma_m, \\ (2) & \eta + \varphi = \lim\limits_m (\eta + \gamma_m), \\ (3) & \underline{\eta + \varphi(n+1)} = \eta + \varphi n + \varphi = \lim\limits_m (\eta + \varphi n + \gamma_m). \end{cases}$$

Hierin sind φ und η Limeszahlen, und zwar nach I in vollregulärer Form. In ($\mathfrak{A}$, 2) ist $\eta+\varphi$ Hilfsfigur, wenn $\eta=\varphi n$ oder $=\xi+\varphi n$ ist. ($\mathfrak{A}$, 1) und ($\mathfrak{A}$, 3) sind also Spezialfälle von ($\mathfrak{A}$, 2). $\varphi n+\gamma_m$, $\eta+\gamma_m$ und $\eta+\varphi n+\gamma_m$ sind reguläre Figuren. — In ($\mathfrak{A}$, 1) ist φ eine beliebige Hauptzahl. Daher ist auch in ($\mathfrak{A}$, 3) φ eine Hauptzahl. Nicht jede gemäß ($\mathfrak{A}$, 2) und ($\mathfrak{A}$, 3) gebildete Figur kommt im Algorithmus vor (vgl. § 3, **3**). — *Wenn φ_i, $i>1$, die i-te Hilfsfigur für φ ist* (vgl. **2**, 3. Absatz, und **3**, Bemerkung zu (3)), *so seien vorweg $\varphi n+\varphi_i$, $\eta+\varphi n-\varphi_i$ und $\eta+\varphi_i$ die i-ten Hilfsfiguren für $\varphi(n+1)$, $\eta+\varphi(n+1)$ und die zu $\eta+\varphi$ gleiche vollreguläre Zahlenfigur.* Wir verwenden also im Algorithmus die Figuren $\varphi n+\lim\limits_m \gamma_m$ usw. nicht.

Das Schema ($\mathfrak{A}$, 1) erläutern wir durch folgende

Koeffizientenregel. Die Formel φn ist eine Abkürzung für $\varphi(n)$, d.h. bei Ersetzung der Variablen n durch eine individuelle Zahl $1+1+\cdots+1$ schreiben wir $\varphi(1+1+\cdots+1)$. n heißt der Koeffizient von φ. — n darf auch durch 1 ersetzt werden, aber diese 1 wird ebenso wie ihre Klammer nicht hingeschrieben. Wir sagen, die Zahlenfigur φ habe den Koeffizienten 1. — In φn darf die Variable n direkt (d.h. ohne Einschließung in ( )) durch ein dekadisches Zahlzeichen >1 ersetzt werden.

Das Schema ($\mathfrak{A}$) beschreibt die „*Konstruktion hinter dem +-Zeichen*“ oder die „*additive Konstruktion*“. Diese wird jeweils abgeschlossen mittels des Operators V nach folgendem Schema:

$$\varphi V = \lim_n \varphi n \qquad (\varphi > 1). \tag{$\mathfrak{B}$}$$

Die Formel φV steht dabei als Abkürzung für $(\varphi)V$, wenn $\varphi>1$; dann ist nämlich φ immer aus mehreren Zeichen (1) zusammengesetzt, so daß um der Eindeutigkeit willen bei Ersetzung der Variablen φ durch eine individuelle Zahlenfigur deren Einklammerung nötig wird. (Die Einklammerung von φ

braucht in der Formel φn bei Individualisierung nicht zu erfolgen, weil der Algorithmus nur „Produkte" aus zwei Faktoren der Form φn kennt.) φV stellt im Fall $\varphi > 1$ dann und nur dann eine Zahlenfigur des Algorithmus (in vollständiger Form) dar, wenn φ eine Hauptzahl in (voll-)regulärer Form ist. *φV ist entweder regulär oder zweite Hilfsfigur.*

V ist ein Operator 1. Stufe, der stets auf eine *Zahlenfigur* „ausgeübt" wird. Die Verwendung der Operatoren 1. Stufe geschieht nach folgendem Schema, in dem W einen Operator 1. Stufe bezeichnet:

$$(\mathfrak{O}_1) \qquad \begin{cases} \text{(a)} & \underline{\alpha\, W^{\beta+1}} = (\alpha\, W^{\beta})\, W \\ \text{(b)} & \underline{\alpha\, W^{\lambda}} = \lim\limits_{n} \alpha\, W^{\gamma_n}, \quad \text{wo} \quad \underline{\lambda} = \lim\limits_{n} \gamma_n . \end{cases}$$

Dabei gilt die Festsetzung, daß $\alpha W^{\delta} (\delta \geq 1)$ eine Abkürzung für $(\alpha) W^{\delta}$ sein soll, wenn α aus mehreren Zeichen besteht, also > 1 ist. Für die Exponentenschreibweise verabreden wir allgemein die nachstehende

Exponentenregel. Ist X ein beliebiger Operator, so darf in der Formel X^{α} die Variable α (der „Exponent" von X) auch durch 1 ersetzt werden, aber diese 1 wird nicht hingeschrieben; wir sagen, die Figur X habe den Exponenten 1. — Ist der Operator X zusammengesetzt, $X = Y \ldots Z$, so ist X^{α} eine Abkürzung für $(X)^{\alpha} = (Y \ldots Z)^{\alpha}$, und bei Ersetzung von α durch 1 wird außer dieser 1 auch die ( ) um $Y \ldots Z$ weggelassen.

Daß die in $(\mathfrak{O}_1)$ links stehenden Zahlenfiguren immer regulär sind, wird sich bei der Entwicklung des Algorithmus ergeben; W^{δ} ist nämlich für $\delta > 1$ nie ein Operator, weil es nach I und II kein mit $(\mathfrak{O}_1)$ vereinbares Schema für seine Anwendung gibt.

Das Schema $(\mathfrak{O}_1)$ beschreibt die *„Konstruktion im Exponenten von W"*; diese wird abgeschlossen mittels des Operators I nach dem Schema

$$(\mathfrak{J}) \qquad \alpha\, W\, I = \lim \left\{ \alpha W,\ \alpha W^{\alpha W},\ \alpha W^{\alpha W^{\alpha W}},\ \ldots \right\}.$$

I ist der „einfachste" Operator 2. Stufe und wird stets auf einen Operator 1. Stufe W ausgeübt. Die Anwendung des Schemas $(\mathfrak{J})$ ist genau dann möglich, wenn αW vollregulär ist. $W I$ ist ein Operator 1. Stufe. — Wenn W aus mehreren Zeichen besteht, soll $\alpha W I$ bzw. $W I$ eine Abkürzung für $\alpha (W) I$ bzw. $(W) I$ sein. Analoge Festsetzungen sollen für die Operatoren höherer Stufe gelten.

Wir schreiben jetzt eine weitere Reihe von Schematas für Operatoren auf, deren Erläuterung anschließend gegeben wird.

$$(\mathfrak{O}_2) \qquad \begin{cases} \text{(a)} & \alpha\, W\, X^{\beta+1} = \alpha\, (W\, X^{\beta})\, X \\ \text{(b)} & \alpha\, W\, X^{\lambda} = \lim\limits_{n} \alpha\, W\, X^{\gamma_n}, \quad \underline{\lambda} = \lim\limits_{n} \gamma_n . \end{cases}$$

$$(\mathfrak{J}') \qquad \alpha\, W\, X\, I' = \lim \left\{ \alpha W X,\ \alpha W X^{\alpha W X},\ \alpha W X^{\alpha W X^{\alpha W X}},\ \ldots \right\}.$$

$$(\mathfrak{O}_3)\qquad \begin{cases} \text{(a)} & \alpha W X Y^{\beta+1} = \alpha W (X Y^{\beta}) Y \\ \text{(b)} & \alpha W X Y^{\lambda} = \lim\limits_{n} \alpha W X Y^{\gamma_n}, \quad \lambda = \lim\limits_{n} \gamma_n . \end{cases}$$

$$(\mathfrak{F}'')\qquad \begin{cases} \alpha W X Y I'' \\ \quad = \lim \Big\{ \alpha W X Y,\ \alpha W X Y^{\alpha W X Y},\ \alpha W X Y^{\alpha W X Y^{\alpha W X Y}},\ \ldots \Big\}. \end{cases}$$

$$(\mathfrak{O}_4)\qquad \begin{cases} \text{(a)} & \alpha W X Y Z^{\beta+1} = \alpha W X (Y Z^{\beta}) Z \\ \text{(b)} & \alpha W X Y Z^{\lambda} = \lim\limits_{n} \alpha W X Y Z^{\gamma_n}, \quad \lambda = \lim\limits_{n} \gamma_n . \end{cases}$$

Endlich für $n \geq 3$ (wobei $I^{(3)}$ für I''' stehen soll):

$$(\mathfrak{F}^{(n)})\qquad \begin{cases} \alpha W X X_1 \ldots X_{n-1} I^{(n)} \\ \quad = \lim \Big\{ \alpha W X \ldots X_{n-1},\ \alpha W X \ldots X_{n-1}^{\alpha W X \ldots X_{n-1}}, \\ \qquad \alpha W X \ldots X_{n-1}^{\alpha W X \ldots X_{n-1}^{\alpha W X \ldots X_{n-1}}}, \ \ldots \Big\}^{7}). \end{cases}$$

$$(\mathfrak{O}_{n-2})\qquad \begin{cases} \text{(a)} & \alpha W X X_1 \ldots X_{n-1} X_n^{\beta+1} = \alpha W X \ldots X_{n-2} (X_{n-1} X_n^{\beta}) X_n \\ \text{(b)} & \alpha W X X_1 \ldots X_{n-1} X_n^{\lambda} = \lim\limits_{p} \alpha W X X_1 \ldots X_{n-1} X_n^{\gamma_p}, \\ & \lambda = \lim\limits_{p} \gamma_p . \end{cases}$$

Um Wiederholungen zu vermeiden, erläutern wir sogleich die allgemeinen Schemata $(\mathfrak{F}^{(n)})$ und $(\mathfrak{O}_{n-2})$; für die speziellen Schemata $(\mathfrak{O}_1)$ bis $(\mathfrak{O}_4)$ und $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}')$, $(\mathfrak{F}'')$ gilt sinngemäß dasselbe.

$W, X, X_1, \ldots, X_n$ sind Variable für Operatoren 1., 2., ..., $(n+2)$-ter Stufe; $I^{(n)}$ ist ein Operator $(n+2)$-ter Stufe. Ist $\alpha W X X_1 \ldots X_n$ eine Zahlenfigur des Algorithmus, so ist in ihr X_n auf X_{n-1} ausgeübt, $X_{n-1} X_n$ ein Operator $(n+1)$-ter Stufe auf X_{n-2} ausgeübt, ..., $X_1 X_2 \ldots X_n$ ein Operator 3. Stufe auf X ausgeübt, $X X_1 \ldots X_n$ ein Operator 2. Stufe auf W ausgeübt und $W X \ldots X_n$ ein Operator 1. Stufe auf α ausgeübt.

$(\mathfrak{O}_{n-2})$ liefert das Schema für die *„Konstruktion im Exponenten von X_n"*, soweit diese im individuellen Fall möglich ist; ist sie „unbeschränkt" durchführbar, so wird sie mittels des Schemas $(\mathfrak{F}^{(n+1)})$ abgeschlossen. Der durch $(\mathfrak{F}^{(n+1)})$ definierte Limes kann nicht durch das Schema $(\mathfrak{O}_{n+2}$, b) erfaßt werden.

Die Zahlen β und λ sind *vor* Anwendung von $(\mathfrak{O}_{n+2})$ konstruiert zu denken. $X_{n-1} X_n^{\beta}$ gilt in $(\mathfrak{O}_{n+2}$, a) als ein Operator $(n+1)$-ter Stufe, auf den X_n ausgeübt wird.

X_n^{δ} ist für $\delta > 1$ kein Operator, erst $X_{n-1} X_n^{\delta}$ kann eventuell ein Operator $(n+1)$-ter Stufe sein (wie in $(\mathfrak{O}_{n+2})$ für $\delta = \beta + 1$ oder $\delta = \lambda$). Daher sind in $(\mathfrak{O}_{n+2})$ jedenfalls $X_{n-1} X_n^{\beta+1}$ und $X_{n-1} X_n^{\lambda}$ reguläre Formen für Operatoren $(n+1)$-ter Stufe. — Die Zahlenfiguren in $(\mathfrak{F}^{(n)})$ und $(\mathfrak{O}_{n+2})$ links können noch

[7]) In schematischen Darstellungen benützen wir gelegentlich die Formeln $m \pm n$ und ähnliche der elementaren Zahlentheorie.

Hilfsfiguren sein, hingegen sind nach I und der Definition des lim die Figuren $\alpha W X \ldots X_{n-1} X_n^{\beta}$, $\alpha W X \ldots X_{n-1} X_n^{\gamma_p}$ in $(\mathfrak{D}_{n+2}$, a, b) und die Figuren innerhalb $\{\}$ in $(\mathfrak{F}^{(n)})$ (voll-)regulär. — In $(\mathfrak{F}^{(n)})$ gelangt man dann links nach höchstens $n+2$ Schritten zu einer regulären Figur. Wenn nämlich $X_{n-1} = Y_{n-1} I^{(n)\beta_1}$ ist, kommt gemäß $(\mathfrak{D}_{n+2}$, a) als nächste Hilfsfigur oder unter Umständen schon als reguläre Figur $\alpha W X \ldots X_{n-2} Y_{n-1} I^{(n)\beta_1+1}$. Ist hierin noch $X_{n-2} = Y_{n-2}(Y_{n-1} I^{(n)\beta_1+1})^{\beta_2}$, so reduziert man mittels $(\mathfrak{D}_{n+1}$, a) usf. Es kann natürlich auch $X_{n-1} I^{(n)}$ eine reguläre Operatorfigur sein und $X_{n-2} = Y_{n-2}(X_{n-1} I^{(n)})^{\beta_1}$; dann wendet man $(\mathfrak{D}_{n+1}$, a) an und kommt mit höchstens $n+1$ Schritten aus. Schließlich kann sogar die Figur $W X \ldots X_{n-1} I^{(n)}$ ein Operator 1. Stufe in regulärer Form sein und $\alpha = \alpha_1 (W X \ldots X_{n-1} I^{(n)})^{\beta_1}$; dann erhält man durch Anwendung von $(\mathfrak{D}_1$, a) schon eine reguläre Zahlenfigur. — In $(\mathfrak{D}_{n-2})$ erfordert die Reduktion auf reguläre Zahlenfiguren links, falls man dort Hilfsfiguren stehen hat, höchstens $n+1$ Schritte, wie man ganz analog einsieht. Ist z. B. in $(\mathfrak{D}_{n+2}$, b) $X_{n-2} = Y_{n-2}(X_{n-1} X_n^{\lambda})^{\beta_1}$, so erhält man vermöge $(\mathfrak{D}_{n+1}$, a): $\alpha W X \ldots (Y_{n-2}(X_{n-1} X_n^{\lambda})^{\beta_1}) X_{n-1} X_n^{\lambda} = \alpha W X \ldots Y_{n-2}(X_{n-1} X_n^{\lambda})^{\beta_1+1}$ usf.

Ist λ_i, $i > 1$, die i-te Hilfsfigur für λ, so sei vorweg $\alpha W X \ldots X_n^{\lambda_i}$ die i-te Hilfsfigur der zu $\alpha W X \ldots X_n^{\lambda}$ gehörigen regulären Zahlenfigur; wir wollen nämlich im Algorithmus die Figur $\alpha W X \ldots X_n^{\lim_p \gamma_p}$ nicht benützen. — *Die linken Seiten von $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}')$, $(\mathfrak{F}'')$, ... sind entweder regulär oder zweite Hilfsfiguren.*

§ 2. Entwicklung des Algorithmus bis zum Anfangsfall $IVII'I''\ldots$.

1. Wir wollen nun zeigen, daß unsere Regeln einen zwangsläufigen Prozeß der Ableitung von Zahlenfiguren bewirken. Die Realisierung des in § 1, **4** skizzierten Beweises für die Gültigkeit der transfiniten Induktion wird sich dabei von selbst ergeben, wenn wir bei jedem Konstruktionsschritt darauf achten, daß die Feststellung „α ist abgeleitet" (oder „gebildet" u. dgl.), also die in § 1, **4** definierte Aussage $\mathfrak{A}(\alpha)$, in dem dort und in § 1, **2** erklärten Sinne richtig ist. Das bedeutet aber, daß die durch die Schemata $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{W})$, $(\mathfrak{D}_1)$, $(\mathfrak{D}_2)$, ..., $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}')$, ... vorgenommenen Definitionen, *sofern sie im Zuge des ab* **1** *entwickelten Algorithmus erfolgen*, zugleich eine Ableitung der definierten Zahlen im erwähnten Sinne darstellen müssen. Wir werden die genannten Schemata mittels folgender (natürlich nur im individuellen Fall als berechtigt einsehbarer) Methoden anwenden.

1. Wenn die Limeszahlen η und φ abgeleitet sind, sehen wir, unter gewissen Voraussetzungen für η und φ, die Zahlen $\eta + \alpha$ für alle $\alpha < \varphi$ als abgeleitet an, und zwar in derselben Reihenfolge, wie die α abgeleitet sind. Damit ergibt sich die Anwendbarkeit von $(\mathfrak{A}, 2)$, $(\mathfrak{A}, 3)$, $(\mathfrak{A}, 1)$ und sodann von $(\mathfrak{W})$. Die additive Konstruktion und ihr Abschluß gemäß $(\mathfrak{W})$ führt also von ableitbaren zu ableitbaren Zahlen. Die Anfügung des Zeichens V zu einer passenden Zahl φ in deren Grundzeile stellt demnach die Ausübung eines Operators dar mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}(\varphi) \Rightarrow \mathfrak{A}(\varphi V)$.

2. Wenn α ableitbar und W ein zu α passender Operator ist, d. h. wenn $\mathfrak{A}(\alpha) \to \mathfrak{A}(\alpha W)$ gilt, wenn ferner β ableitbar ist, so wird unter Voraussetzungen,

die im konkreten Fall zu beurteilen sind, die Ableitbarkeit von αW^β an Hand des Ableitungsprozesses für β eingesehen, d.h. es gilt $\mathfrak{A}(\alpha) \frown \mathfrak{A}(\alpha W) \frown \mathfrak{A}(\beta) \Rightarrow \mathfrak{A}(\alpha W^\beta)$. Zugleich werden alle αW^γ mit $\gamma < \beta$ in derselben Reihenfolge wie die γ als ableitbar betrachtet. Wir nennen dann W einen von αW aus (mindestens bis zum Exponenten β) *iterierbaren* Operator. — Das entsprechende ist hinsichtlich der Operatoren höherer Stufe zu sagen. Natürlich erfolgt die Iteration eines Operators i-ter Stufe an Hand der Schemata $(\mathfrak{O}_i, \text{a}, \text{b})$. — Die Konstruktion im Exponenten oder die Iteration führt also von ableitbaren zu ableitbaren Zahlen. — Ist die Konstruktion im Exponenten „unbeschränkt" durchführbar (vgl. § 1, **5**, den dritten Absatz nach $(\mathfrak{O}_{n+2})$), so ist klar, daß die entsprechenden Limesdefinitionen $(\mathfrak{J})$, $(\mathfrak{J}')$, ... jeweils eine Ableitung darstellen.

Daß die Konstruktion im Exponenten nicht immer unbeschränkt vorgenommen werden kann, zeigt das durch die nachherigen Ausführungen verständlich werdende Beispiel der Ausgangszahl $\left(1VI^{1V}\right)VI$. Mittels des Operators I, auf VI usw. ausgeübt, erhält man durch Iteration $\left(1VI^{1V}\right)VI^2$, $\left(1VI^{1V}\right)VI^3$, ... und auch noch $\left(1VI^{1V}\right)VI^{1V}$. Aber höher darf man nicht gehen, weil die letzte Figur eine gemäß $(\mathfrak{O}_1, \text{a})$ durch $1\left(VI^{1V}\right)^2$ zu ersetzende Hilfsfigur ist.

2. Aus der mit (6) etablierten Zahlenfigur $1V$ gewinnen wir durch Nachfolgerbildung die Zahlen $1V+1$, $1V+1+1$ usw. und können gemäß $(\mathfrak{A}, 1)$ definieren

$$\underline{1V(1+1)} = \underline{1V2} = 1V + 1V = \lim_n (1V + n). \tag{7}$$

Sodann kommt $1V2+1$, $1V2+1+1$, ..., also wieder gemäß $(\mathfrak{A}, 1)$

$$\underline{1V(1+1+1)} = \underline{1V3} = 1V2 + 1V = \lim_n (1V2 + n).$$

Ebenso erhalten wir $1V4$, $1V5$, ... und gemäß $(\mathfrak{B})$ sowie $(\mathfrak{O}_1, \text{a})$

$$\underline{1V^{1+1}} = \underline{1V^2} = (1V)V = \lim_n 1Vn. \tag{8}$$

Nun fangen wir mit $1V^2$ von vorne an und bilden $1V^2+1$, $1V^2+2$, ..., sodann gemäß $(\mathfrak{A}, 2)$ $\underline{1V^2+1V} = \lim_n (1V^2+n)$, darauf $1V^2+1V+1$ usw., gemäß $(\mathfrak{A}, 3)$ $1V^2+1V2$, $1V^2+1V3$ usf. und nach $(\mathfrak{A}, 1)$ mittels (8)

$$\underline{1V^2 2} = 1V^2 + 1V^2 = 1V^2 + (1V)V = \lim_n (1V^2 + 1Vn). \tag{9}$$

Analog schreiten wir zu $1V^23$, $1V^24$, ..., dann zu

$$1V^3 = (1V^2)V = \lim_n 1V^2 n \quad (\text{gemäß } (\mathfrak{B}) \text{ und } (\mathfrak{O}_1, \text{a}))$$

fort, ferner zu $1V^4$, $1V^5$, ... und definieren nach $(\mathfrak{O}_1, \text{b})$

$$\underline{1V^{1V}} = \lim_n 1V^n. \tag{10}$$

Jetzt können wir alle Zahlen $1V^{1V}+\alpha$ mit $\alpha<1V^{1V}$ bilden, ferner $1V^{1V}2$, $1V^{1V}3$ usw., dann $\underline{1V^{1V+1}}=\left(1V^{1V}\right)V$, $1V^{1V+2}$ usw., also auch gemäß $(\mathfrak{D}_1, \mathrm{b})$

$$\underline{1V^{1V(1+1)}}=\underline{1V^{1V}2}=1V^{1V+1V}=\lim_n 1V^{1V+n}, \tag{11}$$

entsprechend $1V^{1V}3$ usf., dann $1V^{1V^2}$, $1V^{1V^3}$, ..., endlich

$$\underline{1V^{1V^{1V}}}=\lim_n 1V^{1V^n}. \tag{12}$$

Um zu (12) zu kommen, haben wir offenbar die Konstruktion von $1V^{1V}$ aus $1V$ im Exponenten von V ausgeführt. Ebenso können wir die Konstruktion von $\beta=1V^{1V^{1V}}$ im Exponenten von V wiederholen (insbesondere alle $1V^\alpha$ mit $\alpha<\beta$ bilden) und zu $1V^\beta=\gamma$ gelangen. Dann läßt sich auch $1V^\gamma=\delta$ ableiten usw. Die Konstruktion im Exponenten ist also hier unbeschränkt möglich und liefert gemäß $(\mathfrak{J})$:

$$\underline{1VI}=\lim\left\{1V,\ 1V^{1V},\ 1V^{1V^{1V}},\ \ldots\right\}. \tag{13}$$

Indem wir die Konstruktion von $1VI$ aus neu beginnen, können wir die zu (13) führenden Überlegungen analog wiederholen und damit VI als einen von $1VI$ aus iterierbaren Operator 1. Stufe erkennen, mit dem wir $\underline{1(VI)^2}=(1VI)\,VI\,((\mathfrak{D}_1, \mathrm{a}))$, ebenso $1(VI)^3$ usw. zu bilden vermögen. Die Konstruktion im Exponenten von VI ist wieder unbeschränkt möglich und führt gemäß $(\mathfrak{J})$ und $(\mathfrak{D}_2, \mathrm{a})$ zu

$$\underline{1VI^2}=1(VI)\,I=\lim\left\{1VI,\ 1(VI)^{1VI},\ 1(VI)^{1(VI)^{1VI}},\ \ldots\right\}. \tag{14}$$

Damit hat sich VI^2 als neuer Operator 1. Stufe ergeben, dessen Iteration $\underline{1(VI^2)^2}=(1VI^2)\,VI^2$, $1(VI^2)^3$ usw. liefert, und die Konstruktion im Exponenten von VI^2 ist wieder unbeschränkt durchführbar. Demnach kommt $\underline{1VI^3}=1(VI^2)\,I$, analog $1VI^4$ usf., $\underline{1VI^{1V}}=\lim_n 1VI^n$ nach $(\mathfrak{D}_2, \mathrm{b})$, $1VI^{1V+1}$ usw. und an Hand der Konstruktion von $1VI$

$$\underline{1VI^{1VI}}=\lim\left\{1VI^{1V},\ 1VI^{1V^{1V}},\ 1VI^{1V^{1V^{1V}}},\ \ldots\right\}. \tag{15}$$

Wir können offenbar auch im Exponenten des iterierbaren Operators 2. Stufe I unbeschränkt konstruieren, d.h. mit der Konstruktion der Zahl

(15) in den Exponenten von I hineingehen usw. und erhalten gemäß $(\mathfrak{Z}')$

$$(16) \qquad \underline{1VII'} = \lim\left\{1VI,\ 1VI^{1VI},\ 1VI^{1VI^{1VI}},\ \ldots\right\}.$$

VII' ist also ein Operator 1. Stufe, der von (16) aus iterierbar ist, und zwar unbeschränkt, also auch, wie man analog zur Herleitung von (16) erkennt, wie V dem Operator 2. Stufe II' unterworfen werden kann, der gleichfalls unbeschränkt von (16) aus iterierbar ist. Es ergibt sich also $1(VII')^2, \ldots, 1(VII')I,\ 1(VII')I^2, \ldots,\ \underline{1V(II')^2} = 1(VII')II',\ 1V(II')^3$ usw., schließlich bei Ausübung des Operators 3. Stufe I' auf den Operator 2. Stufe II': $\underline{1VII'^2} = 1V(II')I'$. Ebenso gelangt man zu $\underline{1VII'^3} = 1V(II'^2)I'$ usw. und schließlich gemäß $(\mathfrak{Z}'')$ zu

$$(17) \qquad \underline{1VII'I''} = \lim\left\{1VII',\ 1VII'^{1VII'},\ 1VII'^{1VII'^{1VII'}},\ \ldots\right\}.$$

In (17) ist $VII'I''$ ein Operator 1. Stufe; auf ihn kann man den Operator 2. Stufe $II'I''$ ebenso ausüben wie in (17) auf V, auf $II'I''$ den Operator 3. Stufe $I'I''$ ebenso wie in (17) auf I, und auf $I'I''$ den Operator 4. Stufe I'' ebenso wie in (17) auf I'. So ergeben sich $\underline{1V(II'I'')^2} = 1(VII'I'')II'I'',\ \underline{1VI(I'I'')^2} = 1V(II'I'')I'I'',\ \underline{1VII'I''^2} = 1VI(I'I'')I''$, analog $1VII'I''^3$ usf., dann gemäß $(\mathfrak{Z}''')$ $1VII'I''I'''$.

So kann man fortfahren. Allgemein gelangt man gemäß Schema $(\mathfrak{Z}^{(n)})$ zu den Zahlenfiguren $(n = 4, 5, \ldots)$

$$(18) \qquad \left\{\underline{1VII'\ldots I^{(n)}} = \lim\left\{1VI\ldots I^{(n-1)},\ 1VI\ldots I^{(n-1)\,1VI\ldots I^{(n-1)}},\ 1VI\ldots I^{(n-1)\,1VI\ldots I^{(n-1)\,1VI\ldots I^{(n-1)}}},\ \ldots\right\}\right.$$

Auch die „Zwischenzahlen" β mit $1VI\ldots I^{(n-1)} < \beta < 1VI\ldots I^{(n)}$ ergeben sich zwangsläufig, wenn man sich irgendwie den Regeln von § 1 überläßt.

Endlich definieren wir

$$(19) \qquad 1VII'I''\ldots = \lim\{1VI,\ 1VII',\ 1VII'I'', \ldots\}.$$

Die Fortführung des Algorithmus erfordert an dieser Stelle ein neues Zeichen, das die Ersetzung der provisorischen Figur $1VII'I''\ldots$ durch eine „reguläre" Figur zu ermöglichen hätte.

3. Nun wollen wir einige sich aus der vorstehenden Entwicklung ergebende Betrachtungen über die allgemeine vollreguläre Form der transfiniten Zahlen anstellen. Diese Zahlen sind Figuren aus den Zeichen (1), in denen V mindestens einmal vorkommt. An sich ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge die einzelnen Zeichen hingeschrieben werden, aus denen eine vollreguläre Zahlenfigur unseres Algorithmus besteht, aber dem Gang der Konstruktion

ist es gemäß, die Einzelzeichen, mit 1 beginnend, nacheinander von links nach rechts bzw. rechts oben aufzuschreiben. Dieser Art des Aufschreibens entspricht eine Reihe von sukzessiv entstehenden Teilfiguren der endgültigen Zahlenfigur α, die mit dem Abschluß der einzelnen Schreibakte vollendet werden. Unter einem Schreibakt soll das Hinschreiben eines Einzelzeichens (1) verstanden sein. Stellt eine dieser Teilfiguren selbst eine — nach I vollreguläre — Zahlenfigur dar, so nennen wir sie einen *Anfang* von α. Zu α gehört also die wohlbestimmte Reihe seiner Anfänge, wozu wir nachträglich auch α selbst rechnen, und diese Anfänge wachsen auch als Zahlen im Sinne von $<$.

Wir geben zwei Beispiele für Reihen von Anfängen.

1. Beispiel. $1, 1V, 1V^{1V}, 1V^{1V+1}, 1V^{1V+1}(1+1), 1V^{1V+1}(1+1+1), 1V^{1V+1}(1+1+1)+1, 1V^{1V+1}(1+1+1)+1+1.$

Das Zeichen ( ) bringt also eine gewisse Ausnahme von der Links-rechts-Regel mit sich, insofern seine rechte Hälfte, wenn ( ) einen Koeffizienten $1+1+\cdots+1$ abgrenzt, den auf $1+1$ folgenden Zeichengruppen $+1$ vorauseilt.

2. Beispiel. $1, 1V, 1VI, 1VI^{1V}, \left(1VI^{1V}\right)V, \left(1VI^{1V}\right)VI, \left(1VI^{1V}\right)(VI)^{1+1}, \left(1VI^{1V}\right)(VI)^{1+1}(1+1), \left(1VI^{1V}\right)(VI)^{1+1}(1+1+1).$

Das Zeichen ( ) bedingt demnach eine weitere Ausnahme von der Links-rechts-Regel, wenn es in Verbindung mit Gruppen von Operatorzeichen gebraucht wird; dann greift seine linke Hälfte unter Umständen über bereits dastehende Zeichen nach links zurück.

Auch die vollständigen Hilfsfiguren, in denen kein Zeichen lim auftritt, weisen die skizzierte Links-rechts-Struktur auf; insbesondere existiert zu einer solchen Zahlenfigur α wieder die Reihe der Anfänge; diese sind vollreguläre Zahlenfiguren mit Ausnahme der letzten, α selbst. Ist $\beta = \alpha$ und β aus α ableitbar, ohne mit α identisch zu sein, so sind die Anfänge von β außer β auch Anfänge von α, aber das umgekehrte braucht nicht der Fall zu sein. Beispiel: Es ist

$$\underline{1(VI^2)^2(1+1)}$$
$$= 1(VI^2)^2 + 1(VI^2)^2 = 1(VI^2)^2 + (1VI^2)VI^2 = 1(VI^2)^2 + (1VI^2)(VI)I.$$

Ersetzt man hierin 2 durch $1+1$, so sieht man, daß nur den beiden letzten Zahlenfiguren dieselben Anfänge vorangehen, während die dritte mehr Anfänge als die zweite, diese mehr als die erste besitzt.

Allgemein gilt: Ist ξ ein Anfang von α, ξ_1 der nächste auf ξ in der Reihe der Anfänge von α folgende Anfang, so ist ξ_1 das Ergebnis einer an der *unveränderten* Figur ξ ausgeführten Konstruktion (wenn man von eventuell hinzukommenden Klammern absieht). Das besagt, daß alle vollständigen Zahlenfiguren β aus den Zeichen (1) mit $\xi < \beta < \xi_1$ ebenfalls ξ als Anfang haben.

Zahlenfiguren, die lediglich aus den Zeichen 1, +, ( ), V, I, ..., $I^{(n)}$ bestehen und $I^{(n)}$ wirklich enthalten, nennen wir $I^{(n)}$-Zahlen. Hierbei kann n auch 1, 2 oder 3 sein, indem wir $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$ durch I', I'', I''' ersetzen (in Ergänzung einer Verabredung in § 1, **1**, 2. Absatz). Die Bezeichnung I-Zahl ist analog zu verstehen. Ebenso ist mit V-Zahl eine Zahlenfigur aus den Zeichen 1, +, ( ) und V gemeint, in der V tatsächlich vorkommt. Offenbar sind die V-Zahlen die Zahlen α mit $1V \leqq \alpha < 1VI$, die I-Zahlen die Zahlen α mit $1VI \leqq \alpha < 1VII'$, allgemein die $I^{(n)}$-Zahlen die Zahlen α mit $1VI \ldots I^{(n)} \leqq \alpha < 1VI \ldots I^{(n+1)}$.

Auf die Vergleichung zweier vollregulärer V-Zahlen oder I-Zahlen werden wir in § 3 näher eingehen. Allgemein läßt sich über die nach § 1, **2** (Schluß) mögliche Vergleichbarkeit zweier nicht identischer vollregulärer Zahlenfiguren η und η' folgendes sagen. Ist η eine $I^{(n)}$-, η' eine $I^{(n')}$-Zahl, so ist $\eta < \eta'$ für $n < n'$. Das entsprechende gilt, wenn η oder η' eine V- oder I-Zahl ist. Sind η und η' zwei V- oder I- oder $I^{(n)}$-Zahlen, *so wird ihre Vergleichung hinsichtlich* $<$ *durch das Hinschreiben von „links nach rechts" realisiert.* Seien nämlich $\xi_1, \ldots, \xi_m$ und $\xi'_1, \ldots, \xi'_{m'}$ die Reihen der Anfänge für η und η'. Es ist also, wenn η und η' $I^{(n)}$-Zahlen sind, $\xi_1 = \xi'_1 = 1$, $\xi_2 = \xi'_2 = 1V$, $\xi_3 = \xi'_3 = 1VI$, ..., $\xi_{n+3} = \xi'_{n+3} = 1VI \ldots I^{(n)}$, ..., $\xi_m = \eta$, $\xi'_{m'} = \eta'$. Entweder ist $m \geqq m'$ mit $\xi_{m''} = \xi'_{m''}$ für $m'' = \min(m, m')$, woraus $\eta \geqq \eta'$ folgt, oder es gibt ein $j \leqq \min(m, m')$, so daß $\xi_i = \xi'_i$ für $i < j$ und $\xi_j \neq \xi'_j$ ist. Da man nur endlich viele Möglichkeiten des figürlichen Übergangs von ξ_{j-1} zu einem ξ_j hat, so daß $\xi_1, \ldots, \xi_{j-1}, \xi_j$ die Reihe der Anfänge für ξ_j darstellt, so läßt sich im konkreten Falle feststellen, welche der Relationen $\xi_j \leqq \xi'_j$ zutrifft. Ist etwa $\xi_j < \xi'_j$, so gilt $\xi_j \leqq \eta < \xi'_j \leqq \eta'$. Denn η entsteht im Fall $\eta > \xi_j$ formal aus ξ_j durch Anfügung weiterer Zeichen. Alle Zahlen zwischen ξ_j und η haben daher ebenfalls den Anfang ξ_j. Also kann ξ'_j kein Zwischenstadium in der Ableitung von η aus ξ_j sein. Wegen $\xi'_j \neq \eta$ muß also $\xi'_j > \eta$ sein.

Im vorletzten Absatz von § 1, **4** haben wir betont, daß die Relation $\beta < \underline{\lambda} = \lim_n \alpha_n$ die Nennbarkeit eines $\alpha_m > \beta$ bedeutet. Genauer gesagt: *Es gibt ein kleinstes n, so daß $\beta < \alpha_n$; d.h. entweder ist $\beta < \alpha_1$ oder es gibt ein i mit* $\alpha_i \leqq \beta < \alpha_{i+1}$. Wir wollen an Hand unserer jetzigen Kenntnis des Algorithmus beschreiben, wie im konkreten Fall ein solches α_n aus der Zahlenfigur β, die wir uns in vollreguläre Form gebracht denken, abgelesen werden kann. Für $\lambda = 1V$ liegt kein Problem vor. Alle weiteren Limesdefinitionen erfolgen nach den Schematas ($\mathfrak{A}$), ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{C}_1$, b), ($\mathfrak{C}_2$, b), ..., ($\mathfrak{J}$), ($\mathfrak{J}'$), ... Es ist aber leicht zu sehen, daß jede Limesdefinition sich im Sinne der Links-rechts-Struktur unserer Zahlenfiguren zurückführen läßt auf die Definition von $1V$ oder auf eine Definition nach einem der Schemata ($\mathfrak{B}$), ($\mathfrak{J}$), ($\mathfrak{J}'$), ... Denn das zuletzt gesetzte Zeichen in der aus $\lim_n \alpha_n$ hervorgehenden zweiten Hilfsfigur für λ (wenn es eine solche gibt, sonst gilt die nachstehende Bemerkung für λ selbst) ist entweder V oder eines der Zeichen $I, I', I'', \ldots$.

Verstehen wir unter der Formel

$$\varrho = \lim_n \sigma_n = \lim \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots\}, \qquad \sigma_n \text{ vollregulär},$$

eines der Schemata $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{J})$, $(\mathfrak{J}')$, ... oder die Definition (6) von $1V$, so hat also die zweite vollständige Hilfsfigur für λ (bzw. λ selbst) die Form ϱ oder, falls eines der Schemata $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{D}_1, \text{b})$, $(\mathfrak{D}_2, \text{b})$, ... zur Definition von λ verwendet wurde, die Form $\vartheta \circ \varrho$, womit gemeint sein soll, daß zu der vollregulären Zahlenfigur ϑ die Figur ϱ hinzugefügt wird (entweder als neuer Exponent oder additiv in der Grundzeile von ϑ bzw. eines Exponenten von ϑ). Im ersten Fall ist $\alpha_n = \sigma_n$, im zweiten $\alpha_n = \vartheta \circ \sigma_n$, im Sinn der Identität.

1. Beispiel. $\lambda = 1\left(VI\,1V^{1V}\right)^2$, $\vartheta \circ \varrho = \left(1VI\,1V^{1V}\right)VI\,1V^{1V}$,

$\vartheta \circ \sigma_n = \alpha_n = \left(1VI\,1V^{1V}\right)VI\,1V^{n}$, $\vartheta = \left(1VI\,1V^{1V}\right)VI\,1V$, $\varrho = 1V$, $\sigma_n = n$.

2. Beispiel. $\lambda = 1VI\,1V^{1V^2(1+1)}$, $\vartheta \circ \varrho = 1VI\,1V^{1V^2+(1V)V}$,

$\vartheta \circ \sigma_n = \alpha_n = 1VI\,1V^{1V^2+1Vn}$, $\varrho = (1V)V$, $\sigma_n = 1Vn$, $\vartheta = 1VI\,1V^{1V^2}$.

Daraus folgt, daß α_n ein Anfang von α_{n-1} ist (denn σ_n ist ein Anfang von σ_{n+1} und $\vartheta \circ \sigma_n$ ist vollregulär) und daß die Zahlen zwischen α_n und α_{n+1} einen Anfang α_n, aber keinen Anfang α_{n+1} besitzen.

Die Klasse der vollregulären Zahlenfiguren $\beta < \lambda$ ist aber die Vereinigung der Klassen der Zahlen $\beta < \alpha_1$, $\alpha_1 \leqq \beta < \alpha_2$, $\alpha_2 \leqq \beta < \alpha_3$ usw. Ist nun $\alpha_1 < \beta < \lambda$, so läßt sich aus der endlichen Zahlenfigur β die Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ derjenigen α_i ablesen, die Anfänge zu ihr sind, und dann gilt $\alpha_n \leqq \beta < \alpha_{n+1}$.

4. Unser Bezeichnungssystem für die vollregulären Zahlenfiguren $< 1V'II'I''...$ erfüllt die von CHURCH und KLEENE[8]) an ein konstruktives Bezeichnungssystem für einen Abschnitt der zweiten Zahlenklasse gestellten Forderungen, die in der Formulierung von W. ACKERMANN[9]) lauten:

1. Jede Zahl ist durch ein einziges Symbol zu bezeichnen.

2. Die Größenvergleichung zweier Ordnungszahlen muß in endlich vielen Schritten (rekursiv) durchgeführt werden können.

3. Das Symbol für die erste Ordnungszahl ist bekannt.

4. Wenn $\alpha + 1$, so muß entschieden werden können, ob α einen Vorgänger hat oder nicht; zutreffendenfalls muß der Vorgänger angebbar sein.

5. Wenn α eine Limeszahl ist, muß eine (rekursiv definierte) Fundamentalfolge für α angegeben werden können.

6. Für jede Ordnungszahl α ist die Gültigkeit der transfiniten Induktion bis zu α hin konstruktiv nachweisbar.

Der Forderung 1. entspricht die Tatsache, daß in unserem System die Gleichung $\alpha = \beta$ für vollreguläre α, β die Identität bedeutet. Die rekursive Vergleichsmöglichkeit in endlich vielen Schritten ist durch die allgemeinen

[8]) CHURCH, A.: The constructive second number class. Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938). — KLEENE, S. C.: On notation for ordinal numbers. J. Symb. Logic. **3** (1938).
[9]) A. a. O. [2]).

Bemerkungen in § 1, **2**, **4** und die Entwicklung des Algorithmus in § 2, **1**, **2** gesichert und die Ausführung der Vergleichung in **3** näher beschrieben. Die Forderung 3. ist trivialerweise erfüllt; ebenso Forderung 4. und 5., denn jede vollreguläre Zahlenfigur hat entweder die Form $\alpha + 1$ oder sie hat die erste Hilfsfigur $\lim_n \alpha_n$ (vgl. unsere Limesschemata) mit vollregulären rekursiv definierten α_n, wobei man auf diese Hilfsform von der vollregulären Form λ aus in endlich vielen Schritten zurückgehen kann. — Daß die transfinite Induktion möglich ist, ergibt sich wieder aus § 1, **2**, **4** und § 2, **1**, **2**.

§ 3. Die Form der Zahlenfiguren $< 1VII'$.

1. Wir wollen uns einen Überblick über die möglichen Formen der vollregulären V- und I-Zahlen verschaffen, also der Zahlen β mit $1V \leq \beta < 1VI$ und der Zahlen β mit $1VI \leq \beta < 1VII'$ (vgl. § 2, **3**). Eine reguläre V-Zahl hat nach § 2, **2** einen Anfang $1V^{\alpha_1}$, wo $\alpha_1 < 1VI$. Wir nehmen an, daß mit dem Hinschreiben von α_1 die Konstruktion im Exponenten von V beendet sei. Dann können wir, im Sinn der nunmehr allein möglichen additiven Konstruktion, noch einen Koeffizienten q_1 hinzufügen, so daß $1V^{\alpha_1} q_1$ entsteht, wobei wir annehmen, daß q_1 nicht weiter vergrößert werden soll. Ist $\alpha_1 > 1$, so dürfen wir eine weitere Figur $+ 1V^{\alpha_2} q_2$ anhängen mit $\alpha_2 < \alpha_1$ (wollten wir $1V^{\alpha_1}$ anhängen, so müßten wir q_1 durch $q_1 + 1$ ersetzen). So können wir fortfahren und gelangen nach einer Reihe von Schritten zu einer Zahlenfigur der Form

$$1V^{\alpha_1} q_1 + 1V^{\alpha_2} q_2 + \cdots + 1V^{\alpha_k} q_k + r, \qquad 1VI > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k, \tag{20}$$

die vollregulär ist, wenn die α_i und q_i (letztere eingeklammert) in vollregulärer Form dastehen bzw., wenn sie gleich 1 sind, gar nicht hingeschrieben werden. In (20) kann r fehlen oder $k = 1$ sein.

Die α_i sind in (20) natürliche Zahlen oder wieder Zahlen der Form (20). Wenn alle $\alpha_i < 1V$ sind, nennen wir die Zahl (20) *einstöckig*; allgemein heiße die Zahl (20) $(n-1)$-*stöckig*, wenn alle α_i höchstens n-stöckig sind (womit zugelassen sei, daß sie $< 1V$ sind), aber wenigstens ein α_i (d. h. mindestens α_1) n-stöckig ist. Die kleinste n-stöckige Zahl ist das n-te Glied der Folge in (13) rechts, d. h. der Fundamentalfolge von $1VI$, das wir für den Augenblick mit $1V_n$ bezeichnen. $1V^{1V}$ ist größer als jede einstöckige, daher $1V^{1V^{1V}}$ größer als jede zweistöckige Zahl usf., d. h. $1V_n$ größer als jede $(n-1)$-stöckige Zahl. *Daher ist für $m > n$ jede m-stöckige Zahl größer als jede n-stöckige.*

Jede n-stöckige Zahl hat im Sinne des Hinschreibens von „links nach rechts (oben)" den Anfang $1V_n = 1V^{1V^{\cdots^{1V}}}$. Eine dreistöckige Zahl z. B. fängt an mit $1V^{1V^{1V}}$, woraus durch sukzessives Hinzufügen der weiteren

Zeichen die folgenden, in der Reihe ihrer Anfänge vorkommenden Zahlen entstehen:

$$1V^{1V^{1V^{\flat}}},\quad 1V^{1V^{1V^{\flat}q}},\quad 1V^{1V^{1V^{\flat}q+\cdots}}=1V^{1V^{\alpha}},\quad 1V^{1V^{\alpha}q'},$$

$$1V^{1V^{\alpha}q'+\cdots}=1V^{\beta},\ 1V^{\beta}q'',\ 1V^{\beta}q''+\cdots.$$

Die regulären Hauptzahlen (s. § 1, **5**, 1. Absatz) unterhalb $1VI$ haben die Form $1V^{\alpha}$ mit $\alpha<1VI$. $1V^{\alpha}n$ ist für $n>1$ keine Hauptzahl, denn n steht für eine Figur $1+1+\cdots+1$. Sind $\chi_1=1V^{\alpha_1}$ und $\chi_2=1V^{\alpha_2}$ zwei Hauptzahlen, so gilt natürlich $\chi_1\lesseqgtr\chi_2$, je nachdem $\alpha_1\lesseqgtr\alpha_2$ ist.

Die regulären transfiniten Zahlen $<1VI$ haben also nach (20) die Form

$$\chi_1 q_1+\chi_2 q_2+\cdots+\chi_k q_k+r,\quad \chi_1>\chi_2>\cdots>\chi_k, \tag{21}$$

wo die χ_i Hauptzahlen der Gestalt $1V^{\alpha_i}$ sind.

Ist $\eta=\chi_1 q_1+\cdots+\chi_k q_k+r$, $\eta'=\chi'_1 q'_1+\cdots+\chi'_{k'} q'_{k'}+r'$, so gilt $\eta=\eta'$ nur im Fall der Identität, also für $k=k'$, $\chi_1=\chi'_1$, $q_1=q'_1$, …, $\chi_k=\chi'_k$, $q_k=q'_k$ und $r=r'$ bzw. wenn r und r' gleichzeitig als Summanden fehlen. $\eta\neq\eta'$ ist nur in folgenden Fällen möglich:

(H)
1. Es gibt ein $i\leqq\min(k,k')$, so daß $\chi_1=\chi'_1$, $q_1=q'_1$, …, $\chi_{i-1}=\chi'_{i-1}$, $q_{i-1}=q'_{i-1}$ für $i>1$ [10]), aber $\chi_i\neq\chi'_i$ ist.
2. Wie 1., nur ist auch noch $\chi_i=\chi'_i$, aber $q_i\neq q'_i$.
3. Es ist $k=k'$, $\chi_1=\chi'_1$, $q_1=q'_1$, …, $\chi_k=\chi'_k$, $q_k=q'_k$, aber entweder $r\neq r'$ oder genau eines der Glieder r, r' fehlt.
4. $k\neq k'$, $\chi_i=\chi'_i$, $q_i=q'_i$ für $i\leqq\min(k,k')$.

Nach unseren Ableitungsregeln (s. unter anderem § 2, **1**, **2**) ist $\eta<\eta'$ in den nachstehenden Fällen:

(H, 1) mit $\chi_i<\chi'_i$; (H, 2) mit $q_i<q'_i$;

(H, 3) mit $r<r'$ oder fehlendem r; (H, 4) mit $k<k'$.

Sind die V-Zahlen η und η' nicht gleichstöckig, so ist ihre Vergleichung trivial. Sind η und η' gleichstöckig, so ist in den Fällen (H, 2—4) die Vergleichung wieder trivial, während im Fall (H, 1) die Exponenten α_i und α'_i zu vergleichen sind. Wenn eine der Zahlen α_i, α'_i eine natürliche Zahl ist oder wenn α_i und α'_i ungleichstöckig sind, liegt wieder ein trivialer Fall vor. Andernfalls ist die Stockwerksanzahl von α_i und α'_i mindestens um 1 niedriger als die von η und η' und wir können die vorstehende Betrachtung hinsichtlich α_i und α'_i wiederholen usw. Wegen der beim Übergang zu den Exponenten ständig abnehmenden Anzahl der Stockwerke müssen wir schließlich auf einen der genannten trivialen Fälle stoßen.

[10]) Daß im Fall $i=1$ die vorstehenden Gleichungen fortfallen, versteht sich von selbst.

Übrigens erfordert schon das Hinschreiben einer Zahl (20) eine Reihe „interner" Vergleichungen wegen der Relationen $\alpha_1 > \cdots > \alpha_k$.

2. Eine I-Zahl in regulärer Form hat nach § 2, 2 einen größten Anfang der Form $1VI^{\alpha_1}(\alpha_1 < 1VII')$, was bedeutet, daß mit dem Hinschreiben von α_1 die Konstruktion im Exponenten von I beendet sein soll. In diesem Anfang ist VI^{α_1} ein Operator 1. Stufe. Er kann noch mit einem Exponenten β_1 „iteriert" werden. Der so entstehende Anfang $1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}$ ist natürlich als das Ergebnis einer Konstruktion im Exponenten von (VI^{α_1}) anzusehen; also muß $\beta_1 < \underline{1VI^{\alpha_1+1} = 1(VI^{\alpha_1})I}$ sein. Die Variablen α_1 und β_1 dürfen auch durch 1 ersetzt werden; dann haben wir die Anfänge $1(VI)^{\beta_1}$ oder $1VI^{\alpha_1}$ oder $1VI$ (s. Exponentenregel § 1, 5).

Mit der Bildung von $1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}$ sei die Konstruktion im Exponenten von (VI^{α_1}) beendet. Dann können wir, wenn $\alpha_1 > 1$, der Zahlenfigur $1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}$ — unter Einschließung in ( ) — noch eine Kombination VI^{α_2} mit $\alpha_2 < \alpha_1$ anhängen, d. h. den Operator 1. Stufe VI^{α_2} auf sie ausüben, so daß $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2}$ entsteht. Die letztere Figur ist ja von $1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}$ aus abzuleiten, wobei das II. Konstruktionsprinzip zu beachten ist. Nach diesem Prinzip können wir zunächst $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI$ bilden, dann $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^2$ und allgemein durch Konstruktion im Exponenten von I jede Zahl $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\mu}$ mit $\mu < \alpha_1$. Wir können auch $\mu = \alpha_1$ machen, aber dann erhalten wir eine Hilfsfigur, welche durch eine reguläre zu ersetzen ist: $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_1} = \underline{1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1+1}}$. Dies aber widerspricht unserem Entschluß, den Exponenten β_1 nicht mehr zu vergrößern. Also bleibt in der Tat nur die Möglichkeit $\alpha_2 < \alpha_1$. (Wenn $\alpha_1 = 1$, so kann auf Grund des genannten Entschlusses auf $1(VI)^{\beta_1}$ der Operator VI nicht mehr ausgeübt werden.)

Der Operator 1. Stufe VI^{α_2} kann wieder einen Exponenten β_2 erhalten, der jetzt $< \left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2+1}$ sein muß, so daß wir zu dem neuen Anfang $\left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)(VI^{\alpha_2})^{\beta_2}$ gelangen. Diesem können wir, wenn $\alpha_2 > 1$, eine Kombination VI^{α_3} mit $\alpha_3 < \alpha_2$ anhängen usw. So fortfahrend kommen wir zu einer regulären Zahlenfigur

$$(22)\quad \begin{cases} \varphi = (\ldots((1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})(VI^{\alpha_2})^{\beta_2})\ldots)(VI^{\alpha_m})^{\beta_m}, & \text{wobei} \\ 1VII' > \alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_m, \quad \beta_1 < 1VI^{\alpha_1+1}, \quad \beta_2 < \left(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1}\right)VI^{\alpha_2+1}, \ldots, \\ \beta_m < (\ldots(1(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots)VI^{\alpha_m+1}. \end{cases}$$

φ ist vollregulär, wenn die α_i und β_i es sind (sofern sie $= 1$ sind, werden sie nicht hingeschrieben). Natürlich kann $m = 1$ sein.

Soll nach der Bildung von φ das Anhängen von Kombinationen $(VI^{\alpha})^{\beta}$ nicht mehr fortgesetzt werden (was im Fall $\alpha_m = 1$ sowieso nicht mehr möglich ist, ohne β_m zu vergrößern), so können wir vor dem Übergang zur additiven Konstruktion noch eine Kombination V^{γ} an die Figur φ anhängen. Dann entsteht die (voll)reguläre Figur

$$(23)\qquad \chi = \varphi V^{\gamma}, \quad \text{wobei} \quad \gamma < \varphi VI \quad (\varphi \text{ s. } (22)).$$

Beispiel:

$$\chi = \Big(\big(1\,(VI\;{}^{1VI})^{1VI}\big)\big(VI\;{}^{1V}\big)^{1VI}\Big)V^{\Big(\big(1\,(VI\;{}^{1VI})^{1VI}\big)\big(VI\;{}^{1V}\big)^{1VI}\Big)V};$$

hierin ist $m=2$, $\alpha_1=1VI$, $\beta_1=1VI<1VI^{\alpha_1+1}$, $\alpha_2=1V<\alpha_1$, $\beta_2=1VI$, $\gamma=\varphi V<\varphi VI$.

In der vollregulären Figur χ, wie sie durch (22) und (23) dargestellt wird, treten keine $+$-Zeichen in der Grundzeile auf. Also ist χ nach § 1, **5** eine Hauptzahl, genauer eine Haupt-I-Zahl. Diese haben also die allgemeine reguläre Form (23); darin kann natürlich der Bestandteil V^γ auch fehlen, so daß $\chi=\varphi$ wird.

Zu χ gibt es folgende Kette von Ungleichungen:

$$(24)\quad \begin{cases} \chi=\varphi\,V^\gamma<\chi\,V^\gamma=\varphi\,V^{\gamma+1}<\varphi\,VI\leqq(\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots)\,(VI^{\alpha_m})^{\beta_m+1}< \\ <(\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots)\,VI^{\alpha_m+1}\leqq(\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots)\,(VI^{\alpha_{m-1}})^{\beta_{m-1}+1}< \\ <(\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots)\,VI^{\alpha_{m-1}+1}\leqq\cdots\leqq(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\,(VI^{\alpha_2})^{\beta_2+1}< \\ <(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\,VI^{\alpha_2+1}\leqq 1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1+1}<1VI^{\alpha_1+1}<1VII'. \end{cases}$$

Das System der Exponenten $\alpha_i, \beta_i, \gamma$ bestimmt seinerseits χ. Wir setzen daher für den Augenblick

$$(25)\qquad \chi=\langle(\alpha_1,\beta_1),\ (\alpha_2,\beta_2),\ \ldots,(\alpha_m,\beta_m),\gamma\rangle.$$

Wenn V^γ in χ fehlt, d.h. $\chi=\varphi$ ist, lassen wir γ in (25) fort. Zum Beispiel ist $1VI=\langle(1,1)\rangle$, $(1VI)V=\langle(1,1),1\rangle$. Wir setzen fest, daß, unter $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ vergleichbare Größen verstanden, die Relation $(\alpha,\beta)\leqq(\gamma,\delta)$ im lexikographischen Sinn gemeint sein soll.

Ist $\chi'=\langle(\alpha_1',\beta_1'),\ldots,(\alpha_{m'}',\beta_{m'}'),\gamma'\rangle$ eine zweite Zahl der Form (23), so gilt $\chi=\chi'$ nur im Fall der Identität, also für $m=m'$, $\alpha_i=\alpha_i'$, $\beta_i=\beta_i'(i=1,\ldots,m)$ und $\gamma=\gamma'$ bzw. wenn γ und γ' beide in den $\langle\,\rangle$-Ausdrücken für χ,χ' fehlen. $\chi\neq\chi'$ ist nur in einem der folgenden Fälle möglich.

$$(\mathrm{H}')\quad \begin{cases} 1.\ \text{Es gibt ein } i\leqq\min(m,m'),\ \text{so daß } (\alpha_1,\beta_1)=(\alpha_1',\beta_1'),\ldots,(\alpha_{i-1},\beta_{i-1})= \\ (\alpha_{i-1}',\beta_{i-1}')\ \text{für } i>1\ \text{und}\ (\alpha_i,\beta_i)\neq(\alpha_i',\beta_i')\ \text{ist.} \\ 2.\ \text{Es ist } m=m',\ (\alpha_1,\beta_1)=(\alpha_1',\beta_1'),\ldots,(\alpha_m,\beta_m)=(\alpha_m',\beta_m'),\ \gamma\neq\gamma'. \\ 3.\ \text{Wie 2., aber genau eines der Glieder } \gamma,\gamma' \text{ fehlt.} \\ 4.\ m\neq m'\ \text{und}\ (\alpha_i,\beta_i)=(\alpha_i',\beta_i')\ \text{für}\ i\leqq\min(m,m'). \end{cases}$$

Daraus schließt man, daß $\chi<\chi'$ in den nachstehenden Fällen gilt:

(H', 1) mit $(\alpha_i,\beta_i)<(\alpha_i',\beta_i')$; (H', 2) mit $\gamma<\gamma'$;
(H', 3) mit fehlendem γ; (H', 4) mit $m<m'$.

Die Fälle (H', 2–4) verstehen sich von selbst. Ist im Fall (H', 1) etwa $\alpha_i<\alpha_i'$, so ist wegen $\alpha_i<\alpha_i'<\alpha_{i-1}'=\alpha_{i-1}$ auch $\alpha_i+1<\alpha_{i-1}$, d.h. die in der

Reihe der Ungleichungen (24) auftretende Zahlenfigur

$$((\ldots(1\,(VI^{\alpha_1})^{\beta_1})\ldots)\,(VI^{\alpha_{i-1}})^{\beta_{i-1}})\,VI^{\alpha_i+1} > \chi$$

ist regulär und somit als der $\langle\,\rangle$-Ausdruck darstellbar:

$$\langle(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}),\ (\alpha_i + 1, 1)\rangle.$$

Diese Zahl ist aber $\leqq \langle(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}),\ (\alpha_i', \beta_i')\rangle \leqq \chi'$, d.h. es gilt in der Tat $\chi < \chi'$. Analog schließt man im Fall $\alpha_i = \alpha_i',\ \beta_i < \beta_i'$.

Es ist zu bemerken, daß aus $\chi < \chi'$ immer $\chi V \leqq \chi'$ folgt.

Zu der Hauptzahl (23) gibt es, wenn sie als größter derartiger Anfang einer I-Zahl dienen, d.h. wenn mit dem Hinschreiben von γ die Konstruktion im Exponenten von V beendet sein soll, nur noch figürliche Ergänzungen, die Ergebnisse einer additiven Konstruktion darstellen. Also hat eine reguläre I-Zahl η die allgemeine Form (21), worin mindestens χ_1 eine Zahl der Gestalt (23) ist, während die restlichen χ_i auch Haupt-V-Zahlen sein können. Es darf natürlich in (21) wieder $k = 1$ sein oder $+r$ fehlen.

Für die Größenvergleichung zweier I-Zahlen η und η' der Form (21) gelten wieder die in I angegebenen Kriterien, die aus den Fallunterscheidungen (H) folgen.

Die Exponenten (25) der $\chi_i \geqq 1VI$ in (21) sind entweder $< 1VI$ oder wieder I-Zahlen der Form (21). Wenn sämtliche Exponenten (25) aller $\chi_i \geqq 1VI$ unterhalb $1VI$ liegen, nennen wir die Zahlenfigur (21) *I-einstöckig*. Allgemein heiße die Zahl (21) *I-$(n+1)$-stöckig*, wenn die Exponenten (25) der $\chi_i \geqq 1VI$ höchstens *I-n-stöckig* sind (worin die Möglichkeit einbegriffen sei, daß sie $< 1VI$ sind), aber mindestens ein *I-n-stöckiger* Exponent auftritt. — Die Verschiedenheit der I-Stockwerksanzahl ist nicht mehr entscheidend für die Größenvergleichung, denn die I-einstöckige Zahl $1\,(VI)^2$ z.B. ist größer als jedes Glied der zugehörigen Fundamentalfolge $(1VI)\,V,\ (1VI)\,V^{(1VI)\,V}, \ldots$, deren n-tes Glied I-n-stöckig ist. Das im Anschluß an (23) für χ gegebene Beispiel ist I-dreistöckig.

Sei nun η eine reguläre I-Zahl. Sie hat also die Form (21), worin mindestens χ_1 die Form (23) hat. Dafür schreiben wir kurz $\eta = 1VI^{\alpha}\ldots$[11]). Ferner sei $\alpha = 1VI^{\alpha'}\ldots,\ \alpha' = 1VI^{\alpha''}\ldots, \ldots$, zuletzt $\alpha^{(e-2)} = 1VI^{\alpha^{(e-1)}}\ldots$ mit $\alpha^{(e-1)} < 1VI$. Dann hat im Sinn der Links-rechts-Struktur η den Anfang $1VI^{1VI^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1VI^{\alpha^{(e-1)}}}}}}}$, der eine I-e-stöckige Zahl darstellt, die wir die *I-Spitze* von η nennen. Ersetzen wir $\alpha^{(e-1)}$ durch eine größere Zahl $\tau < 1VII'$, so wird nach dem vorhin Bewiesenen $\alpha^{(e-2)} = 1VI^{\alpha^{(e-1)}}\ldots < 1VI^{\tau}$, $\alpha^{(e-3)} = 1VI^{\alpha^{(e-2)}}\ldots < 1VI^{1VI^{\tau}}$ und

[11]) Natürlich soll unter α der erste Exponent im $\langle\,\rangle$-Ausdruck (25) für χ_1 verstanden sein.

schließlich $\eta < 1VI^{1VI^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{1VI^{\tau}}}}}}$. Bezeichnen wir das n-te Glied der Fundamentalfolge $1VI$, $1VI^{1VI}$, ... für $1VII'$ in (16) mit $1VI_n$, so ergibt sich, wenn wir in der letzten Ungleichung $\tau = 1VI$ setzen:

$$1VI_e \leqq \eta < 1VI_{e+1}.$$

Daraus entnehmen wir, *daß $1VI_e$ die kleinste I-Zahl mit I-e-stöckiger Spitze ist und daß für $e' > e$ jede I-Zahl mit e'-stöckiger Spitze jede I-Zahl mit e-stöckiger Spitze übertrifft.*

Nun wollen wir sehen, wie sich die Größenvergleichung zweier verschiedener vollregulärer I-Zahlen η und η' abspielt. η und η' haben die Form (21). Sind die Spitzen von η und η' ungleichstöckig, so ist die Vergleichung trivial. Andernfalls muß zunächst (H) herangezogen werden. Wenn einer der Fälle (H, 2—4) vorliegt, sind wir wieder fertig. Findet (H, 1) statt, so sind χ_i und χ_i' zu vergleichen. Ist nur eine dieser Zahlen $< 1VI$ oder sind ihre I-Spitzen ungleichstöckig, so sind wir fertig, und wenn beide Zahlen $< 1VI$ sind, verfahren wir nach **1**. Andernfalls müssen wir die Vergleichung nach (H') vornehmen. Die Fälle (H', 3, 4) sind wieder trivial. Im Fall (H', 1) sind entweder α_i und α_i' oder, wenn $\alpha_i = \alpha_i'$, β_i und β_i', und im Fall (H', 2) γ und γ' zu vergleichen. Die vorstehende Betrachtung wiederholt sich für diese beiden Exponenten (wenn nicht der triviale Fall eintritt, daß wenigstens einer $< 1VI$ wird), wobei zu beachten ist, daß die Anzahlen ihrer I-Stockwerke wenigstens um 1 niedriger sind als bei η und η'. Nach endlich vielen Schritten müssen wir daher auf einen der genannten „trivialen" Fälle stoßen.

Auf Grund der in (22), (23) und (21) verlangten Ungleichungen sind wieder „interne" Vergleichungen notwendig für das Hinschreiben einer algorithmisch möglichen I-Zahl.

Überblicken wir das hier und in **1** entwickelte Vergleichungsverfahren für Zahlen $< 1VII'$, so können wir feststellen, daß es ganz nach dem allgemeinen Rezept von § 2, **3** verläuft.

3. In analoger Weise kann man sich einen Überblick über die allgemeine vollreguläre Form der I'-Zahlen, also der Zahlen $1VII' \leqq \alpha < 1VII'I''$ verschaffen, jedoch wird die Darstellung etwa dreieinhalb mal so umfangreich wie bei den I-Zahlen, und es ist klar, daß die Kompliziertheit mit dem Übergang zu Operatoren höherer Stufe rasch wächst. Wieweit es möglich ist, einen expliziten Überblick über die Struktur der $I^{(n)}$-Zahlen bei variablem n zu geben, bleibe dahingestellt. Jedoch leuchtet es ohne weiteres ein, daß der Begriff der $I^{(n)}$-Stockwerkszahl sowie der $I^{(n)}$-Spitze einer $I^{(n)}$-Zahl sich zugleich mit dem zugehörigen Vergleichskriterium (s. **2**, viertletzter Absatz) übertragen läßt. Auch die allgemeine Struktur (21) der Haupt-$I^{(n)}$-Zahlen mit den aus (H) folgenden Kriterien und damit der Hauptzahlen des Algorithmus überhaupt bleibt in Geltung, wie man auf Grund der Links-rechts-Schreibung und des Prinzips der Anfänge leicht einsieht. — φV ist immer die nächste Hauptzahl nach φ, und zwar (zweite) Hilfsfigur, wenn $\varphi = \chi V^{\nu}$ ist.

Wir wollen noch kurz darauf eingehen, wie der Algorithmus mit der üblichen Bezeichnungsweise für Ordnungszahlen zusammenhängt. Es ist $1V=\omega$ und $\varphi V=\varphi\cdot\omega$. Daraus folgt $1V^2=\omega^2$, allgemein $1V^\alpha=\omega^\alpha$ für $\alpha<1VI$, daher $1VI=\varepsilon_0$, darunter die kleinste ε-Zahl verstanden. Also wird

$$(1VI)\,V^{(1VI)\,V}=\varepsilon_0\omega^{\varepsilon_0\omega}=\varepsilon_0^{\omega},$$

$$(1VI)\,V^{(1VI)\,V^{(1VI)\,V}}=\varepsilon_0\omega^{\varepsilon_0^{\omega}}=\omega^{\varepsilon_0^{\omega}},$$

$$(1VI)\,V^{(1VI)\,V^{(1VI)\,V^{(1VI)\,V}}}=\varepsilon_0\omega^{\omega^{\varepsilon_0^{\omega}}}=\omega^{\omega^{\varepsilon_0^{\omega}}}\quad\text{usw.},$$

$$\text{d.h.}\quad 1\,(VI)^2=\varepsilon_1,$$

also die zweite ε-Zahl, allgemein $1\,(VI)^n=\varepsilon_{n-1}$, $1\,(VI)^\alpha=\varepsilon_\alpha$ für $\omega\leqq\alpha<1VI^2$, demnach $1\,(VI)^{1VI}=\varepsilon_{\varepsilon_0}$, $1\,(VI)^{1\,(VI)^{1VI}}=\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0}}$ usw. $1VI^2$ ist demnach die erste kritische Zahl der Folge der ε-Zahlen. Überhaupt steht unser Bezeichnungssystem, wie in der Einleitung erwähnt, in engster Verbindung mit der Progression nach kritischen Zahlen, was aus den Definitionen $(\mathfrak{Z})$, $(\mathfrak{Z}')$, $(\mathfrak{Z}'')$,... unmittelbar hervorgeht.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 20. Februar 1953.)

Zeller, K.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 414—435 (1953)

FK-Räume in der Funktionentheorie. II*.

Von
Karl Zeller.

Inhaltsverzeichnis.

§ 8. Der *FK*-Raum $\mathfrak{R}$ 414
§ 9. Konvergenzsätze 417
§ 10. Nichtexistenz von radialen Grenzwerten 419
§ 11. Existenzmengen radialer Grenzwerte 421
§ 12. Ungleichmäßige Existenz radialer Grenzwerte 424
§ 13. Teilsummen von Potenzreihen stetiger Funktionen 426
§ 14. Betragssummen bei gleichmäßig konvergenten Potenzreihen 428
§ 15. Schlußbemerkungen 433
Literatur 434

§ 8. Der *FK*-Raum $\mathfrak{R}$.

Übersicht. Die Menge der Stellen $\mathfrak{a}$, für die $\sum a_k z^k$ in $|z|<1$ konvergiert und also eine reguläre Funktion $a(z)$ definiert, bildet einen *FK*-Raum, den wir mit $\mathfrak{R}$ bezeichnen (8.1). Aus verschiedenen Durchschnittsdarstellungen von $\mathfrak{R}$ lesen wir ab, daß in $\mathfrak{R}$ starke und schwache Konvergenz gleichbedeutend sind (8.2) und daß $\mathfrak{R}$ eine Kompaktheitseigenschaft besitzt, die für Konvergenzsätze der Funktionentheorie von Bedeutung ist (8.3). Aus $\mathfrak{R}$ leiten wir weitere *FK*-Räume her, indem wir an das Verhalten von $a(z)$ gewisse Forderungen stellen (Räume $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{R}_S$, $\mathfrak{L}_B$, $\mathfrak{L}_S$). Von einigen dieser Räume zeigen wir, daß sie nicht als *BK*-Räume aufgefaßt werden können (8.4).

Schon Fréchet [1906] war bekannt, daß $\mathfrak{R}$ mit einer geeigneten Metrik ein *F*-Raum (im Sinne von Banach [1932]) ist. $\mathfrak{R}$ kann auch als vollkommener Raum aufgefaßt werden und hat dann dieselbe Topologie wie als *F*-Raum. Von diesem Standpunkt aus hat Toeplitz [1949] $\mathfrak{R}$ untersucht und unter anderem 8.2 bewiesen.

Satz 8.1 (Der *FK*-Raum $\mathfrak{R}$). *$\mathfrak{R}$ [die Menge der $\mathfrak{a}$, für die $\sum a_k z^k$ in $|z|<1$ konvergiert, also eine reguläre Funktion $a(z)$ darstellt], ist ein FK-Raum mit jedem der vier folgenden Systeme von Halbnormen:*

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \overline{\operatorname{fin}}_{k=0,1,\dots} |a_k \varrho^k| \\ (2) & \sum_{k=0}^{\infty} |a_k \varrho^k| \\ (3) & \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \varrho^{2k}} \\ (4) & \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho} |a(z)| \end{array}\right\} \quad \varrho = \varrho_0, \varrho_1, \dots,$$

wo ϱ_i irgendeine Folge mit $0<\varrho_0<\varrho_1<\cdots$, $\lim \varrho_i = 1$ ist.

* Der erste Teil der Arbeit ist in Bd. 58, S. 288—305 erschienen.

Zusatz. Wegen 7.1 definieren die vier Systeme dieselbe gleichmäßige Struktur in $\mathfrak{R}$. — $\mathfrak{R}$ besitzt Abschnittskonvergenz (s. § 2), also liegen die abbrechenden Stellen in $\mathfrak{R}$ dicht.

Beweis. Wir rufen die *BK*-Räume $\mathfrak{S}_N$ (Nullfolgen), $\mathfrak{L}_1$ (absolut konvergente Reihen), $\mathfrak{L}_2$ (quadratkonvergente Reihen) aus § 2 in Erinnerung. Wie in Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix) bedeute $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ die Menge der a mit $\{a_k\varrho^k\} \in \mathfrak{S}_N$, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k\varrho^k = 0$ (ϱ fest); analog sind $\mathfrak{L}_1(\varrho^k)$ und $\mathfrak{L}_2(\varrho^k)$ erklärt. Aus ganz elementaren Tatsachen folgt

$$\mathfrak{R} = \bigcap \mathfrak{S}_N(\varrho^k) = \bigcap \mathfrak{L}_1(\varrho^k) = \bigcap \mathfrak{L}_2(\varrho^k),$$

wo ϱ bei der Durchschnittsbildung alle Zahlen $0<\varrho<1$ oder eine Folge ϱ_i mit den oben angegebenen Eigenschaften durchläuft. Nach Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix) ist $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ ein *BK*-Raum mit der Norm $\overline{\text{fin}}\limits_{k=0,1,\ldots} |a_k\varrho^k|$. Ähnliches gilt für $\mathfrak{L}_1(\varrho^k)$ und $\mathfrak{L}_2(\varrho^k)$. Kriterium 2.3 (Durchschnitt von *FK*-Räumen) liefert die Behauptung in den Fällen (1), (2) und (3). Wir kommen zu (4). Bekanntlich gilt

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \varrho^{2k}} \leq \overline{\text{fin}}_{|z|<\varrho} |a(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \varrho^k, \tag{5}$$

wenn $a(z)$ in $|z|<\varrho$ regulär und beschränkt ist (Gutzmer [1888], s. auch Landau [1929, S. 8]). (2) und (3) definieren ein und dieselbe gleichmäßige Struktur in $\mathfrak{R}$, wegen (5) wird diese Struktur auch durch die Halbnormen (4) bestimmt, was die Behauptung im Falle (4) ergibt. — Da die Räume $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ Abschnittskonvergenz besitzen, hat auch $\mathfrak{R}$ diese Eigenschaft [vgl. Lemma 7.5 (Konvergenz im Durchschnitt von *FK*-Räumen)].

Wir ordnen hier und im folgenden einer Stelle a die Funktion $a(z) = \sum a_k z^k$ in einem gewissen Regularitäts- und Eindeutigkeitsgebiet (das im allgemeinen das Innere des Einheitskreises sein wird) zu. Beschränktheit bzw. Konvergenz einer Folge $a^{(n)}$ im *FK*-Raum $\mathfrak{R}$ bedeutet für die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ gleichmäßige Beschränktheit bzw. gleichmäßige Konvergenz in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ [man betrachte die Halbnormen (4)!]. Die Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ mit dem System (4) ist im wesentlichen gleichbedeutend mit dem Weierstraßschen Doppelreihensatz.

Satz 8.2 (Schwache Konvergenz in $\mathfrak{R}$). *Im FK-Raum $\mathfrak{R}$ ist jede schwache Cauchyfolge sogar eine Cauchyfolge, also konvergent. M. a. W.: In $\mathfrak{R}$ sind schwache und starke Konvergenz gleichbedeutend.*

Beweis. Nach Banach [1932, S. 137] trifft die Behauptung zu mit $\mathfrak{L}_1$ an Stelle von $\mathfrak{R}$ (diese Tatsache folgt leicht aus dem Satz von Schur [1920] über konvergenzerzeugende Matrizen), somit gilt sie auch in $\mathfrak{L}_1(\varrho^k)$ (Isomorphie!). Lemma 7.5 (Konvergenz im Durchschnitt von *FK*-Räumen) ergibt die Behauptung.

Satz 8.3 (Kompaktheit von $\mathfrak{R}$). *Jede beschränkte Folge im FK-Raum $\mathfrak{R}$ enthält eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ sei in $\mathfrak{R}$ beschränkt, dann ist sie auch in jedem $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ $(0<\varrho<1)$ beschränkt — vgl. 7.5 (Konvergenz im Durchschnitt von FK-Räumen) —, insbesondere koordinatenweise beschränkt. Wir greifen eine koordinatenweise konvergente Teilfolge $\mathfrak{b}^{(n)}$ heraus. Auf Grund bekannter und leicht ersichtlicher Eigenschaften von $\mathfrak{S}_N$ und $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ (man beachte, daß $\mathfrak{L}_1$ der duale Raum zu $\mathfrak{S}_N$ ist), ist $\mathfrak{b}^{(n)}$ in jedem $\mathfrak{S}_N(\varrho^k)$ eine schwache Cauchyfolge, also wegen 7.5 auch in $\mathfrak{R}$ eine schwache Cauchyfolge. 8.2 vollendet den Beweis.

8.3 ist äquivalent mit dem bekannten Satz, daß man aus einer Familie gleichmäßig beschränkter regulärer Funktionen eine Folge herausgreifen kann, die in jedem abgeschlossenen Teilbereich des betrachteten Gebietes gleichmäßig konvergiert.

Wir leiten aus $\mathfrak{R}$ weitere BK- und FK-Räume her, die weniger umfassend als $\mathfrak{R}$ sind. Wir geben eine Liste dieser Räume, in der hinter der Bezeichnung die definierende Eigenschaft des Raumes steht (der Raum enthält genau die Stellen, die diesen Bedingungen genügen).

$\mathfrak{R}_B$ (beschränkte Funktionen): $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|a(z)|<\infty$;

$\mathfrak{R}_S$ (stetige Funktionen): $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, $\overline{\lim}_{|w-z|\to 0}|a(w)-a(z)|=0$

[d.h. $a(z)$ ist in $|z|<1$ gleichmäßig stetig];

$\mathfrak{Q}_B$: $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|<\infty$;

$\mathfrak{Q}_S$: $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho)$ ex. $\left(\text{d.h. } \overline{\lim}_{\varrho,\sigma\to 1-}|a(\varrho)-a(\sigma)|=0\right)$.

Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) zeigt, daß $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{Q}_B$ FK-Räume sind, wenn man zu den Halbnormen von $\mathfrak{R}$ noch $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|a(z)|$ bzw. $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|$ hinzufügt. Aus Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) folgt, daß $\mathfrak{R}_S$ und $\mathfrak{Q}_S$ abgeschlossene Unterräume in $\mathfrak{R}_B$ bzw. $\mathfrak{Q}_B$, also FK-Räume mit denselben Halbnormen wie $\mathfrak{R}_B$ bzw. $\mathfrak{Q}_B$ sind. Bei $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ kann man nach Kriterium 2.5 (Wechsel der Halbnormen) die Halbnormen von $\mathfrak{R}$ weglassen, $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ sind also BK-Räume mit der Norm $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|a(z)|$. Hingegen gilt

Satz 8.4. *$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Q}_B$ und $\mathfrak{Q}_S$ sind keine BK-Räume.*

Beweis. Es wird genügen, den Beweis für $\mathfrak{Q}_B$ durchzuführen. Wäre $\mathfrak{Q}_B$ ein BK-Raum, so gälten nach Kriterium 2.6 (FK- und BK-Raum) mit einem festen r Ungleichungen der Form

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_i}|a(z)|\le M_i\cdot\left(\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|+\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_0}|a(z)|+\cdots+\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_r}|a(z)|\right)\qquad(\mathfrak{a}\in\mathfrak{Q}_B),$$

oder auch

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_i}|a(z)|\le N_i\cdot\left(\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|+\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho_r}|a(z)|\right)\qquad(\mathfrak{a}\in\mathfrak{Q}_B).$$

Für $\varrho_r<\varrho_i<1$ widerlegt man diese durch Funktionen der Gestalt

$$a(z)=e^{-\alpha z}\quad(\alpha>0\text{ genügend groß}).$$

Hingegen lassen sich $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}_B$ und $\mathfrak{L}_S$ sehr wohl als B-Räume auffassen, in denen die Abbildungen $\mathfrak{a} \to a_k$ linear, aber nicht stetig sind. Man bildet dazu diese Räume mittels Hamelbasen linear und eineindeutig auf einen B-Raum gleicher Mächtigkeit ab.

§ 9. Konvergenzsätze.

Übersicht. Wir geben in 9.1 hinreichende Bedingungen dafür an, daß eine Folge von in $|z|<1$ regulären Funktionen $a^{(n)}(z)$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig konvergiert, wobei wir auf dem Begriff der schwachen Konvergenz in *FK*-Räumen fußen. Wir beleuchten dabei den Zusammenhang zwischen „Konvergenzbedingungen" und „Eindeutigkeitsbedingungen", auf den schon Ostrowski [1923] hingewiesen hat. Mit 9.1 erhält man die bekannten Konvergenzsätze von Vitali, Blaschke, Khintchine-Ostrowski unmittelbar aus den entsprechenden Eindeutigkeitssätzen. Unser Beweisprinzip eignet sich umgekehrt zur Aufstellung von Bedingungen für schwache Konvergenz in gewissen *FK*-Räumen (9.2).

Die im ersten Teil von Satz 9.1 beschriebene Methode (Ausnutzung der Kompaktheit) wurde schon von Montel gebraucht („normale Familien", s. Bieberbach [1934, S. 174]) und von Toeplitz [1949] zu einem Beweis des Vitalischen Satzes auf Grund der Theorie der vollkommenen Räume benützt.

Wir betrachten wieder den *FK*-Raum $\mathfrak{R}$ (vgl. Satz 8.1) der $\mathfrak{a}$, für die $a(z) = \sum a_k z^k$ in $|z|<1$ konvergiert. Aus Satz 8.2 (Schwache Konvergenz in $\mathfrak{R}$) und Satz 8.1 (Der *FK*-Raum $\mathfrak{R}$) entnehmen wir, daß schwache Konvergenz einer Stellenfolge $\mathfrak{a}^{(n)}$ in $\mathfrak{R}$ gleichbedeutend damit ist, daß $a^{(n)}(z)$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig konvergiert. Bildet nun $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine schwache Cauchyfolge in einem *FK*-Raum $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{R}$, so ist $\mathfrak{a}^{(n)}$ nach Lemma 7.1 (Vergleich der Topologien von *FK*-Räumen) auch in $\mathfrak{R}$ eine schwache Cauchyfolge und sogar schwach konvergent. Die $a^{(n)}(z)$ haben daher die oben beschriebene Konvergenzeigenschaft. Bedingungen für schwache Konvergenz in $\mathfrak{E}$ liefern also einen „Konvergenzsatz". Diese Bedingungen lassen sich unter Zusatzannahmen über $\mathfrak{E}$ besonders leicht formulieren.

Satz 9.1 (Allgemeiner Konvergenzsatz). *$\mathfrak{E}$ sei ein FK-Raum mit $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}'$ eine Untermenge des Duals $\mathfrak{E}'$ von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{a}^{(n)}$ eine beschränkte Folge in $\mathfrak{E}$, es existiere $\lim_{n\to\infty} \langle \mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{a}' \rangle$ für jedes $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}'$. Dann ist $\mathfrak{a}^{(n)}$ im Raum $\mathfrak{R}$ konvergent, d.h. die zugehörigen Funktionen $a^{(n)}(z)$ sind in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig konvergent, wenn eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt ist:*

I. $\mathfrak{F}'$ ist bezüglich $\mathfrak{E}$ total, d.h. aus $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle = 0$ für alle $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}'$ folgt $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$. In $\mathfrak{E}$ enthält jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

II. $\mathfrak{E}$ ist ein BK-Raum. $\mathfrak{F}'$ bildet im Dual $\mathfrak{E}'$ (der nach § 1 als B-Raum aufgefaßt wird) eine Grundmenge.

Beweis. I. Angenommen, es sei $\mathfrak{a}^{(n)}$ nicht schwach konvergent im Raum $\mathfrak{E}$. Wegen der Kompaktheitsvoraussetzung kann man zwei Teilfolgen $\mathfrak{b}^{(n)}$ und $\mathfrak{c}^{(n)}$ bestimmen, die gegen zwei verschiedene Grenzelemente $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ schwach konvergieren. Nun gilt für jedes $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}'$

$$\langle \mathfrak{b}, \mathfrak{a}' \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathfrak{b}^{(n)}, \mathfrak{a}' \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathfrak{a}^{(n)}, \mathfrak{a}' \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathfrak{c}^{(n)}, \mathfrak{a}' \rangle = \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{a}' \rangle .$$

Da $\mathfrak{F}'$ total ist, folgt hieraus $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, also ein Widerspruch. Somit ist $\mathfrak{a}^{(n)}$ sicher eine schwache Cauchyfolge in $\mathfrak{E}$, also nach Lemma 7.1 (Vergleich der Topologien in FK-Räumen) eine schwache Cauchyfolge in $\mathfrak{R}$, daher wegen Satz 8.2 (Schwache Konvergenz in $\mathfrak{R}$) in $\mathfrak{R}$ konvergent. Dies bedeutet auch schon die Behauptung — betrachte das System (4) in Satz 8.1 (Der FK-Raum $\mathfrak{R}$).

II. Man legt sich leicht zurecht, daß $\mathfrak{a}^{(n)}$ im Raum $\mathfrak{E}$ eine schwache Cauchyfolge ist — vgl. BANACH [1932, S. 133]. Weiter wie unter I.

Bemerkungen. Die unter I verwandte Methode ist z.B. von den „normalen Familien" her bekannt. — Von $\mathfrak{F}'$ muß man natürlich mindestens die Eigenschaft „total" fordern; das bedeutet, daß die Stelle $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, also die Funktion $a(z)$ durch die Werte $\langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle$ $(\mathfrak{a}' \in \mathfrak{F}')$ bestimmt ist (Eindeutigkeitsbedingung). Man überlegt sich auch, daß diese Bedingung allein nicht hinreicht, daß also in I. die Voraussetzung über $\mathfrak{E}$ nicht weggelassen werden darf. In II. erkennt man den kleinen Schritt, der von einem Eindeutigkeitssatz zu einem Konvergenzsatz zu machen ist: Man verschärft „$\mathfrak{F}'$ ist total" zu „$\mathfrak{F}'$ ist eine Grundmenge". Ist $\mathfrak{E}$ ein reflexiver B-Raum (d.h. jede stetige Linearform $\mathfrak{a}''$ in $\mathfrak{E}'$ in der Gestalt $\langle \mathfrak{a}', \mathfrak{a}'' \rangle = \langle \mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \rangle$ mit einem gewissen $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$ darstellbar), so ist jedes totale $\mathfrak{F}'$ auch eine Grundmenge, wie aus dem Hahn-Banachschen Fortsetzungssatz folgt. Andererseits genügt ein reflexives $\mathfrak{E}$ der Kompaktheitsbedingung in I. (s. DIEUDONNE-SCHWARTZ [1949, Th. 4 und Prop. 17]). Hieraus erkennt man die Verwandtschaft der Bedingungen I und II. Jedenfalls sind reflexive Räume für unsere Betrachtungen am geeignetsten. — Wir haben übrigens Bedingung II deshalb nur für BK-Räume formuliert, um der Schwierigkeit aus dem Weg zu gehen, daß der duale Raum eines F-Raumes im allgemeinen kein F-Raum ist.

Mit 9.1 erhält man aus geläufigen Eindeutigkeitsbedingungen bekannte Konvergenzsätze der Funktionentheorie, unter anderem die von VITALI, BLASCHKE und KHINTCHINE-OSTROWSKI (s. BIEBERBACH [1934, S. 168] und [1931, S. 111 und 157]). Wir führen dies am letztgenannten Satz durch.

Wir betrachten den reflexiven BK-Raum $\mathfrak{L}_2$ der $\mathfrak{a}$ mit $\sum |a_k|^2 < \infty$ (s. § 2). Bei $\mathfrak{a} \in \mathfrak{L}_2$ existiert für fast alle ζ mit $|\zeta| = 1$ der Grenzwert

$$\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho \zeta) \qquad (= a(\zeta) \text{ gesetzt})$$

(s. etwa RIESZ [1916]) und es ist wegen

$$\int_0^{2\pi} |a(\varrho \zeta)|^2 \, d\varphi = 2\pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \varrho^{2k} \qquad (0 \leq \varphi = \arg z < 2\pi;\ 0 < \varrho < 1)$$

auch

$$\int_0^{2\pi} |a(\zeta)|^2 \, d\varphi = 2\pi \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2.$$

Man sieht, daß für jede meßbare Menge $Y \subset < 0, 2\pi)$

$$\int_Y a(\zeta) \, d\varphi$$

existiert und eine stetige Linearform in $\mathfrak{L}_2$ darstellt.

Satz von Khintchine und Ostrowski. Die $\mathfrak{a}^{(n)}$ mögen eine beschränkte Folge in $\mathfrak{L}_2$ bilden. Es gebe eine meßbare Menge $X \subset (0, 2\pi)$ mit streng positivem Maß, so daß für jedes meßbare $Y \subset X$

$$\lim_{n\to\infty} \int_Y a^{(n)}(\zeta)\, d\varphi$$

existiert. Dann konvergiert $a^{(n)}(z)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$.

Bemerkung. Gegenüber der ursprünglichen Formulierung des Satzes sind die Voraussetzungen abgeschwächt:

1. Beschränktheit der Funktionenfolge $a^{(n)}(z)$ ist durch „$\mathfrak{L}_2$-Beschränktheit" von $\mathfrak{a}^{(n)}$ ersetzt (um im reflexiven Raum $\mathfrak{L}_2$ arbeiten zu können).

2. Konvergenz von $a^{(n)}(\zeta)$ für alle $|\zeta|=1$ mit $\arg\zeta \in X$ ist durch die dem Sachverhalt und dem Beweise besser angepaßte Konvergenz der genannten Integrale ersetzt. (Man könnte sogar ohne die Kenntnis der Existenz der radialen Grenzwerte auskommen.)

Beweis. Die stetigen Linearformen

$$\int_Y a(\zeta)\, d\varphi$$

bilden eine totale Menge (s. Riesz [1916]). $\mathfrak{L}_2$ ist reflexiv. Satz 9.1 zusammen mit der Bemerkung über reflexive Räume ergibt die Behauptung.

Satz 9.2 (Schwache Konvergenz in schwach kompakten Räumen). *Ist $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{R}$ ein FK-Raum mit der in 9.1 I geforderten Kompaktheitseigenschaft, so ist eine Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ genau dann in $\mathfrak{E}$ schwach konvergent, wenn sie in $\mathfrak{E}$ beschränkt ist und $\lim_{n\to\infty} a^{(n)}(z)$ für jedes z in $|z|<1$ existiert.*

Beweis. Die Bedingungen sind notwendig. Denn $\mathfrak{a}\to a(z)$ ist für jedes z in $|z|<1$ eine stetige Linearform; und aus schwacher Konvergenz folgt Beschränktheit (vgl. Zeller [1951_2, Satz 1.1]). Wie in 9.1 beweist man, daß die Bedingungen hinreichen.

Anwendung. So erhält man z.B. die von Taylor [1950] aufgestellten Bedingungen für schwache Konvergenz in $\mathfrak{H}_p (p>1)$.

Es gibt noch andere Möglichkeiten, die Theorie der *FK*-Räume für „Konvergenzsätze" auszunützen. So ist z.B. jede koordinatenweise konvergente und in einem *FK*-Raum $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{R}$ beschränkte Folge $\mathfrak{a}^{(n)}$ im *FK*-Raum $\mathfrak{R}$ konvergent.

§ 10. Nichtexistenz von radialen Grenzwerten.

Übersicht. Wir suchen Funktionen $a(z)$, die in $|z|<1$ regulär sind und bei denen $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für einige ζ mit $|\zeta|=1$ nicht existiert. Wir zeigen mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln in 10.1 bis 10.4, daß es Fälle gibt, in denen der genannte Grenzwert für ein, abzählbar viele, überabzählbar viele, alle ζ mit $|\zeta|=1$ nicht existiert; genauer weisen wir sogar $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} |a(\varrho\zeta)| = \infty$ für die betreffenden ζ nach. Daran schließen sich die Sätze 10.5 und 10.6 an, die besagen, daß nur „wenige" der in einem Gebiet regulären Funktionen über dieses Gebiet hinaus analytisch fortgesetzt werden können. 10.1 bis 10.3 sind ziemlich

trivial, 10.4 stammt von LUSIN-PRIWALOFF [1925], ein Teil von 10.5 steht bei KIERST-SZPILRAJN [1933], die funktionalanalytische Hilfsmittel zur Konstruktion starker Singularitäten bei analytischen Funktionen heranzogen. Bei 10.5 vgl. man auch POLYA [1917].

Wir betrachten den FK-Raum $\mathfrak{R}$ der Stellen $\mathfrak{a}$, die eine in $|z|<1$ reguläre Funktion $a(z)=\sum a_k z^k$ definieren, und die Unterräume $\mathfrak{Q}_B$ $(a(\varrho)$ beschränkt in $0<\varrho<1$, zusätzliche Halbnorm $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|$; s. §8) und $\mathfrak{Q}_B(\zeta^k)$ $[a(\varrho\zeta)$ beschränkt in $0<\varrho<1$, vgl. Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix)].

Hilfssatz 10.1 (Unbeschränktheit auf einem Strahl). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, *so daß* $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho)|=\infty$ *gilt, d.h. es ist* $\mathfrak{R}\not\subset\mathfrak{Q}_B$.

Beweis. Hierfür gibt es einfache Beispiele, etwa $a(z)=\log(1-z)$. Will man ohne die Kenntnis spezieller Singularitäten auskommen, so kann man Lemma 7.2 (Vergleich von Halbnormen) anwenden [setze $\mathfrak{E}=\mathfrak{R}$, $\mathfrak{F}=\mathfrak{Q}_B$, man widerlegt $(\mathcal{M})$ durch Einsetzen der Funktionen $n\cdot z^n$].

Hilfssatz 10.2 (Unbeschränktheit auf abzählbar vielen Strahlen). *Ist* D *irgendeine abzählbare Teilmenge von* $|\zeta|=1$, *so gibt es ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, *so daß* $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho\zeta)|=\infty$ *für jedes* $\zeta\in D$ *gilt, d.h. es ist* $\mathfrak{R}\subsetneq\bigcup_{\zeta\in D}\mathfrak{Q}_B(\zeta^k)$.

Beweis. Aus 10.1 folgt leicht $\mathfrak{R}\subsetneq\mathfrak{Q}_B(\zeta^k)$ für jedes einzelne $\zeta\in D$. Lemma 7.4 (Vereinigung von FK-Räumen) liefert die Behauptung.

Satz 10.3 (Unbeschränktheit auf überabzählbar vielen Strahlen). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, *so daß* $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho\zeta)|=\infty$ *für überabzählbar viele* ζ *mit* $|\zeta|=1$ *gilt.*

Beweis. Sei B irgendein abgeschlossener Teilbogen von $|\zeta|=1$ mit streng positiver Länge. B läßt sich als vollständiger metrischer Raum auffassen. Wir wählen in 10.2 D als eine in B dicht liegende Menge und bestimmen ein entsprechendes $\mathfrak{a}$. Lemma 5.2 (Unbeschränkte halbstetige Funktion) zeigt, daß $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho\zeta)|=\infty$ für alle ζ einer in B fetten, also überabzählbaren Menge gilt [halte $a(z)$ fest, betrachte $\overline{\operatorname{fin}}$ als Funktion in B]. — Diese Beweismethode stammt von STEINHAUS [1919].

Satz 10.4 (Unbeschränktheit auf allen Strahlen; LUSIN-PRIWALOFF [1925]). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$ *mit* $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}\ \underline{\operatorname{fin}}_{|z|=\varrho}|a(z)|=\infty$.

Beweis. Sei

$$\left.\begin{matrix}\chi(\mathfrak{a})\\ \psi(\mathfrak{a})\end{matrix}\right\}=\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}\ \underline{\operatorname{fin}}_{|z|=\varrho}|a(z)|\leqq\infty\quad(\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}).$$

ψ ist Minorante der Halbnorm χ in $\mathfrak{R}$ — vgl. Hilfssatz 3.3 ($\underline{\operatorname{fin}}$ von Halbnormen) und 3.4 ($\overline{\operatorname{fin}}$ von Halbnormen und Minoranten). Die Funktionen $\psi_\varrho(\mathfrak{a})=\underline{\operatorname{fin}}_{|z|=\varrho}|a(z)|$ $(0<\varrho<1)$ sind in $\mathfrak{R}$ stetig, also ist ψ nach unten halbstetig — vgl. 3.4. Die abbrechenden Stellen liegen in $\mathfrak{R}$ dicht — s. Zusatz zu Satz 8.1 (Der FK-Raum $\mathfrak{R}$) —, daher ist die $\chi(\mathfrak{b})<\infty$ betreffende Voraussetzung in Satz 5.4 (Halbstetige Minorante) erfüllt. ψ ist in keiner Umgebung von $\mathfrak{o}$ im Raum $\mathfrak{R}$ beschränkt, denn die den Funktionen $n\cdot z^n$ entsprechenden

Stellen streben im FK-Raum $\mathfrak{R}$ gegen $\mathfrak{o}$ für $n \to \infty$, weil die Funktionen in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|<1$ gleichmäßig gegen Null konvergieren — vgl. Satz 8.1. Satz 5.4 ergibt die Behauptung.

Ist G ein Gebiet der z-Ebene, von dem wir zur Vereinfachung der Bezeichnung annehmen, daß es den Nullpunkt erhält, so bedeute $\mathfrak{R}(G)$ die Menge der Stellen $\mathfrak{a}$, die eine in G reguläre und eindeutige Funktion $a(z)=\sum a_k z^k$ definieren. Sei F_n die Menge der $z \in G$ mit $|z| \leq n$, die vom Rande von G einen Abstand $\geq n^{-1}$ haben. Dann ist $\mathfrak{R}(G)$ ein FK-Raum mit den Halbnormen $\underset{z \in F_j}{\text{fin}} |a(z)|$ $(j=0, 1, \ldots)$, wie aus dem Weierstraßschen Konvergenzsatz folgt.

Satz 10.5 (Nichtfortsetzbare Funktionen im Einheitskreis). *$\mathfrak{E}$ sei ein FK-Raum, $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{R}$. Zu jedem Punkt ζ mit $|\zeta|=1$ gebe es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, so daß $a(z)$ in $z=\zeta$ singulär ist. Dann ist die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{E}$, für die $a(z)$ über $|z|<1$ hinaus analytisch fortsetzbar ist, mager in $\mathfrak{E}$.*

(Die Voraussetzungen sind z. B. für $\mathfrak{E}=\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{L}_1$ erfüllt.)

Beweis. Wir wählen eine Folge von Gebieten $G_j > \{|z|<1\} + G_j$, die so beschaffen sind, daß jede über $|z|<1$ fortsetzbare Funktion in mindestens einem G_j regulär ist. [Wir können etwa G_j die Gebiete durchlaufen lassen, die entstehen, wenn man den Kreis $|z-\zeta|<\varrho$ (ϱ rational, $|\zeta|=1$, ζ mit rationalem Realteil) mit dem Kreis $|z|<1$ vereinigt.] $\mathfrak{R}(G_j)$ $(j=0, 1, \ldots)$ sei wie oben der FK-Raum der $\mathfrak{a}$ mit in G_j regulärem $a(z)$. Die im Satz genannte Menge ist dann $= \bigcup \mathfrak{R}(G_j)$. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{R}(G_j) \neq \mathfrak{E}$ $(j=0, 1, \ldots)$, also nach 7.1 eine magere Menge in $\mathfrak{E}$, woraus die Behauptung folgt.

Satz 10.6 (Nichtfortsetzbare Funktionen in beliebigen Gebieten). *G sei ein Gebiet der z-Ebene (wobei wir o. B. d. A. $0 \in G$ annehmen), $\mathfrak{R}(G)$ der FK-Raum der $\mathfrak{a}$ mit in G regulärem $a(z)$. Dann ist die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}(G)$, für die $a(z)$ über G hinaus analytisch fortsetzbar ist, mager in $\mathfrak{R}(G)$.*

Beweis. Wir dürfen voraussetzen, daß G einen endlichen Randpunkt besitzt. K_j durchlaufe die Kreise $|z-z_j|<\varrho_j$, wo z_j eine in G dicht liegende Punktfolge bildet und ϱ_j die kleinste Zahl ist, für die auf $|z-z_j|=\varrho_j$ ein Randpunkt von G liegt. Die Menge $\mathfrak{E}^{(j)}$ der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}(G)$ mit $\underset{z \in K_j}{\text{fin}} |a(z)| < \infty$ bildet nach 2.1 (Linearer Unterraum) einen FK-Raum. Einfache Beispiele (rationale Funktionen mit einem Pol) lehren $\mathfrak{E}^{(j)} \neq \mathfrak{R}(G)$ $(j=0, 1, \ldots)$. Die im Satz genannte Menge ist in $\bigcup \mathfrak{E}^{(j)}$ enthalten, jedes $\mathfrak{E}^{(j)}$ bildet nach 7.1 eine magere Menge im FK-Raum $\mathfrak{R}(G)$, woraus die Behauptung folgt.

§ 11. Existenzmengen radialer Grenzwerte.

Übersicht. Wir fragen: Zu welchen Teilmengen C von $|\zeta|=1$ gibt es eine in $|z|<1$ reguläre Funktion $a(z)$, so daß $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta \in C$ existiert, für die übrigen ζ mit $|\zeta|=1$ nicht existiert? 11.1 bringt eine einfache Bemerkung in dieser Richtung. In 11.3 und 11.5 zeigen wir — gestützt auf die Hilfssätze 11.2 und 11.4 —, daß C beliebig als Komplement einer abzählbaren Menge bzw. beliebig als abgeschlossene oder offene Menge gewählt werden darf. Für 11.5 verwenden wir wieder die Minoranten (s. § 3), während bei 11.3 eine eigentümliche Schwierigkeit auftritt.

Wir betrachten hier den Raum $\mathfrak{R}$ der Stellen $\mathfrak{a}$, die eine in $|z|<1$ reguläre Funktion $a(z)=\sum a_k z^k$ definieren (s. Satz 8.1), und die Unterräume $\mathfrak{R}_B$ ($a(z)$ beschränkt in $|z|<1$), $\mathfrak{Q}_B$ ($a(\varrho)$ beschränkt in $0<\varrho<1$), $\mathfrak{Q}_S$ ($\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho)$ existiert) (vgl. § 8), $\mathfrak{Q}_B(\zeta^k)$ ($a(\varrho\zeta)$ beschränkt in $0<\varrho<1$), $\mathfrak{Q}_S(\zeta^k)$ ($\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ existiert) [vgl. Kriterium 2.4 (Transformation mit einer Diagonalmatrix)]. Alle diese Räume sind *FK*- bzw. *BK*-Räume.

Bemerkung 11.1 (Existenz und Nichtexistenz abzählbar vieler Randwerte). *Sind C und D zwei fremde, abzählbare Teilmengen von $|\zeta|=1$, so gibt es ein $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, so daß $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ bei $\zeta\in C$ existiert und $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1}|a(\varrho\zeta)|=\infty$ für $\zeta\in D$ gilt.*

Beweis. Die Behauptung lautet mit den oben genannten Bezeichnungen

$$\bigcap_{\zeta\in C}\mathfrak{Q}_S(\zeta^k)\not\subset\bigcup_{\xi\in D}\mathfrak{Q}_B(\xi^k).$$

Daß diese Beziehung ohne das Vereinigungsvorzeichen rechts für jedes einzelne $\xi\in D$ richtig ist, erkennt man wie im Hilfssatz 10.1 (Unbeschränktheit auf einem Strahl). Lemma 7.4 (Vereinigung von *FK*-Räumen) vollendet den Beweis.

Hilfssatz 11.2 (Randwerte bei beschränkten Funktionen). *Es gibt ein $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$ mit $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|a(z)|<\infty$, so daß $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta=1$ nicht existiert, für alle andern ζ auf $|\zeta|=1$ existiert.*

Beweis. Ein solches $a(z)$ ist etwa die Funktion

$$a(z)=(1-z)^\alpha=\sum\binom{\alpha}{k}(-1)^k z^k\quad(\alpha\neq 0,\ Re\,\alpha=0)$$

(s. KNOPP [1947, S. 440] oder LANDAU [1929, S. 68]).

Etwas abgeschwächt lautet die Behauptung $\mathfrak{R}_B\not\subset\mathfrak{Q}_S$. Dies kann man auch ohne Kenntnis spezieller Singularitäten beweisen. Die in Hilfssatz 10.1 (Unbeschränktheit auf einem Strahl) gebrauchte Methode des Vergleichs der Halbnormen (Lemma 7.2)

$$\mathfrak{R}_B\colon\ \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|a(z)|;\qquad \mathfrak{Q}_S\colon\ \overline{\operatorname{fin}}_{0<\sigma<1}|a(\sigma)|,\quad \overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho}|a(z)|\quad(\varrho=\varrho_0,\varrho_1,\dots\text{ wie in 8.1})$$

versagt zwar hier, wo $\mathfrak{R}_B\cap\mathfrak{Q}_S$ ein abgeschlossener Unterraum in $\mathfrak{R}_B$ ist. Wir können jedoch den gleitenden Buckel (§ 4) anwenden: Wir bestimmen eine Folge von Stellen $\mathfrak{a}^{(n)}\in\mathfrak{R}_B$, so daß

$$|a^{(n)}(z)|<\begin{cases}4 & (|z|<1)\\ 2^{-n-2} & (|z|<1,\ z\notin G_n),\end{cases}$$
$$|a^{(n)}(\varrho_n)|=1$$

ist, wo die G_n gewisse paarweise fremde Teilgebiete von $|z|<1$ mit

$$2>\overline{\operatorname{fin}}_{z\in G_n}|1-z|>\operatorname{fin}_{z\in G_n}|1-z|>\overline{\operatorname{fin}}_{z\in G_{n+1}}|1-z|\to 0\quad(n\to\infty)$$

sind und $\varrho_n \in G_n$, ϱ_n reell gilt. Wir setzen etwa

$$a^{(0)}(z) = (z-1)(z+1), \quad \varrho_0 = 0$$

und bestimmen G_0 in geeigneter Weise. Dann definieren wir

$$a^{(1)}(z) = a^{(0)}\left(w^{-1}(z)\right), \quad \varrho_1 = w(\varrho_0),$$

wo $w(z)$ eine lineare Abbildung des Einheitskreises auf sich ist, die G_0 in ein „näher bei Eins" gelegenes G_1 mit $G_0 \cap G_1 = 0$ abbildet usw. $a(z) = \sum a^{(n)}(z)$ hat die gewünschten Eigenschaften. $\sum a^{(n)}$ ist im Sinne der starken Topologie von $\mathfrak{R}_B$ divergent. Der „Buckel" ist hier deshalb überlegen, weil man bei ihm auch mit solchen divergenten Reihen umgehen kann.

Satz 11.3 (Nichtexistenz genau abzählbarer vieler Randwerte). *Ist D eine abzählbare Teilmenge von $|\zeta| = 1$, C ihr Komplement, so gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$, so daß $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta \in C$ existiert, für $\zeta \in D$ nicht existiert.*

Beweis. Sei $\mathfrak{E}$ die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_B$, für die $\lim_{\varrho \to 1} a(\varrho\zeta)$ $(\zeta \in C)$ existiert. $\mathfrak{E}$ ist nach Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) ein *BK*-Raum (vgl. $\mathfrak{Q}_S$ in § 8). Aus 11.2 folgt sofort $\mathfrak{E} \not\subset \mathfrak{Q}_S(\zeta^k)$ für jedes einzelne $\zeta \in D$, daher gilt nach Lemma 7.4 (Vereinigung von *FK*-Räumen) auch $\mathfrak{E} \not\subset \bigcup_{\zeta \in D} \mathfrak{Q}_S(\zeta^k)$, w. z. b. w.

Man kann jedoch im allgemeinen nicht $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} |a(\varrho\zeta)| = \infty$ für $\zeta \in D$ erreichen, da aus dieser Bedingung die Nichtexistenz weiterer Randwerte folgt, wenn D in einem Bogen des Einheitskreises dicht liegt — s. Satz 10.3 (Unbeschränktheit auf überabzählbar vielen Strahlen). Daher mußten wir uns auch auf Hilfssatz 11.2 stützen.

Hilfssatz 11.4 (Große und kleine Funktionswerte). *C und D seien zwei fremde abgeschlossene Teilmengen von $|\zeta| = 1$. Bei vorgegebenem $M > 0$ und σ mit $0 < \sigma < 1$ existiert eine abbrechende Stelle $\mathfrak{a}$ mit*

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\sigma} |a(z)| < 1,$$

$$\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} \overline{\operatorname{fin}}_{\zeta \in C} |a(\varrho\zeta)| < 1,$$

$$\underline{\operatorname{fin}}_{\zeta \in D} |a(\zeta)| > M.$$

(Aus der dritten Ungleichung folgt hier

$$\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} \underline{\operatorname{fin}}_{\zeta \in D} |a(\varrho\zeta)| > M.)$$

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß C und D Teilbögen des Einheitskreises sind; denn ist der Hilfssatz schon in dieser speziellen Form bewiesen, so führt Überdeckung von D mit endlich vielen untereinander und zu C fremden abgeschlossenen Bögen (Heine-Borel!) leicht zum Ziel. Wir wählen λ und μ so, daß $\lambda\zeta - \mu$ für $\zeta \in C$ bzw. $\zeta \in D$ einen Realteil < 0 bzw. $> \log M$ hat. Die Funktion $b(\zeta) = c^{\lambda\zeta - \mu}$ ist dann in C dem Betrage nach < 1, in D

dem Betrage nach $> M$. Zusatz eines Faktors z^n (n genügend groß) bewirkt, daß die Funktion $z^n \cdot b(z)$ alle drei Ungleichungen von 11.4 erfüllt [man beachte, daß $b(z)$ in $|z| \leqq 1$ gleichmäßig stetig ist]. Die Potenzreihe von $z^n b(z)$ konvergiert in $|z| < 1$ gleichmäßig. Durch Abbrechen dieser Reihe erhalten wir die gewünschte Stelle $\mathfrak{a}$.

Satz 11.5 (Existenzmengen bei Randwerten). *C sei eine abgeschlossene oder offene Teilmenge von $|\zeta| = 1$. Dann gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$, so daß $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta \in C$ existiert, für die übrigen ζ mit $|\zeta| = 1$ nicht existiert.*

Beweis. Wir dürfen $C \neq \{|\zeta| = 1\}$ (klar!) und C nicht leer [wegen Satz 10.4 (Unbeschränktheit auf allen Strahlen)] annehmen.

I. C sei abgeschlossen, $\mathfrak{R}_S(C)$ die Menge der $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$, bei denen $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für $\zeta \in C$ gleichmäßig existiert. $\mathfrak{R}_S(C)$ ist ein FK-Raum, wenn man zu den Halbnormen von $\mathfrak{R}$ noch $\overline{\underline{\text{fin}}}_{0<\varrho<1} \overline{\underline{\text{fin}}}_{\zeta \in C} |a(\varrho\zeta)|$ hinzufügt [Beweis mit Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) und 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) wie bei $\mathfrak{R}_S$ in § 8]. Mit $\overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A}$ (Menge der abbrechenden Folgen) in $\mathfrak{R}_S(C)$. Nach Kriterium 2.2 (abgeschlossener Unterraum) ist $\overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ mit denselben Halbnormen wie $\mathfrak{R}_S(C)$ ein FK-Raum. D sei eine abgeschlossene, zu C fremde Teilmenge von $|\zeta| = 1$. Wir betrachten

$$\left.\begin{matrix}\chi(\mathfrak{a}; D) \\ \psi(\mathfrak{a}; D)\end{matrix}\right\} = \overline{\underline{\text{fin}}}_{0<\varrho<1} \overline{\underline{\text{fin}}}_{\zeta \in D} |a(\varrho\zeta)|$$

als Funktionen in $\overline{\mathfrak{R}}_S(C)$. Dabei ist ψ Minorante der Halbnorm χ — s. Hilfssatz 3.3 ($\underline{\text{fin}}$ von Halbnormen) und 3.4 ($\overline{\underline{\text{fin}}}$ von Halbnormen und Minoranten). ψ ist als obere Grenze stetiger Funktionen nach unten halbstetig. In $\overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ liegt $\mathfrak{A}$ nach Definition dicht, daher ist die $\chi(\mathfrak{b}) < \infty$ betreffende Voraussetzung in Satz 5.4 (Halbstetige Minorante) erfüllt, die ψ und ($\mathcal{M}$) betreffende Bedingung wurde in 11.4 nachgewiesen. Nach 5.4 ist die Menge der $\mathfrak{a} \in \overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ mit $\psi(\mathfrak{a}; D) = \infty$ fett. Das Komplement von C (bezüglich $|\zeta| = 1$) läßt sich als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener D_j darstellen. Lemma 5.1 (Magerkeitssatz von Baire) zeigt die Existenz eines $\mathfrak{a} \in \overline{\mathfrak{R}}_S(C)$ mit $\psi(\mathfrak{a}; D_j) = \infty$ für $j = 0, 1, \ldots$, w. z. b. w.

II. C sei offen, dargestellt als Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen $C_0 < C_1 < \ldots$. Das Komplement von C (bezüglich $|\zeta| = 1$) sei D. Wie oben zeigt man die Existenz eines $\mathfrak{a}$ mit $\psi(\mathfrak{a}; D) = \infty$ in demjenigen FK-Raum $\mathfrak{E}$, der die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{A}$ im FK-Raum $\bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{R}_S(C_j)$ (Bezeichnung wie oben) ist.

Übrigens läßt sich die Voraussetzung abschwächen zu „C ist eine F_σ-Menge".

§ 12. Ungleichmäßige Existenz radialer Grenzwerte.

Übersicht. Wir betrachten Stellen $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}$ (für die also $a(z) = \sum a_k z^k$ in $|z| < 1$ konvergiert), bei denen $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ für alle ζ mit $|\zeta| = 1$ existiert, jedoch nicht gleichmäßig. 12.1 und 12.2 behandeln zwei einfache Möglichkeiten dieser Art, während 12.3 besagt, daß es Fälle gibt, in denen die Konvergenz des Grenzüberganges $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho\zeta)$ in keinem Teilbogen des Einheitskreises gleichmäßig ist.

Im folgenden setzen wir stets $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta) = a(\zeta)$, falls dieser Grenzwert existiert.

Bemerkung 12.1 (Randwerte bei unbeschränkten Funktionen). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$ *mit* $\operatorname{fin}_{|z|<1} |a(z)| = \infty$, *so daß* $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ *für alle* ζ *mit* $|\zeta| = 1$ *existiert.*

Beweis. Da 12.1 nicht besonders wichtig ist, fassen wir uns kurz. Wir wählen eine Zahlenfolge δ_j mit $2\pi > \delta_j \searrow 0$. C_j sei die Menge der $|\zeta| = 1$ mit $\delta_j \leq \arg\zeta \leq 2\pi$, $\mathfrak{R}_S(C_j)$ die Menge der $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, für die $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ gleichmäßig für $\zeta\in C_j$ existiert [für die also $a(z)$ in dem betreffenden Sektor gleichmäßig stetig ist]. $\mathfrak{R}_S(C_j)$ ist ein *FK*-Raum, wenn man zu den Halbnormen von $\mathfrak{R}$ (s. Satz 8.1) noch $\overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} \overline{\operatorname{fin}}_{\zeta\in C_j} |a(\varrho\zeta)|$ hinzufügt [Beweis mit Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) und Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) ähnlich wie bei $\mathfrak{R}_S$ in § 8]. Nach Kriterium 2.3 (Durchschnitt von *FK*-Räumen) ist $\bigcap_{j=0}^{\infty} \mathfrak{R}_S(C_j)$ ein *FK*-Raum mit den Halbnormen

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\varrho} |a(z)| \ (\varrho = \varrho_0, \varrho_1, \ldots \text{ wie in 8.1}), \qquad \overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} \overline{\operatorname{fin}}_{\zeta\in C_j} |a(\varrho\zeta)| \quad (j = 0, 1, \ldots).$$

Es genügt zu zeigen, daß dieser Raum nicht in $\mathfrak{R}_B$ enthalten ist. Dazu verwenden wir Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von *FK*-Räumen) mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}_B$. Die dort genannte Ungleichung, die im Falle des Enthaltenseins gilt, vereinfacht sich hier wegen der „Monotonieeigenschaften" der Halbnormen zu

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} |a(z)| \leq M \cdot \Big(\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<\sigma} |a(z)| + \overline{\operatorname{fin}}_{0<\varrho<1} \overline{\operatorname{fin}}_{\zeta\in C} |a(\varrho\zeta)| \Big) \quad \Big(\mathfrak{a}\in \bigcap \mathfrak{R}_S(C_j)\Big),$$

wo $M > 0$, $\sigma < 1$ und r als natürliche Zahl passend gewählt sind. Diese Ungleichung widerlegt man durch Einsetzen einer geeigneten Funktion der Form $a(z) = \frac{\alpha}{z-\lambda}$ ($0 < \arg\lambda < \delta_k$, $|\lambda| > 1$, $|\lambda| - 1$ genügend klein). — Man könnte auch Satz 7.6 (Abschnittsdichte im Durchschnitt von *FK*-Räumen) anwenden.

$\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ seien wieder die *BK*-Räume der $\mathfrak{a}$, bei denen $a(z)$ in $|z|<1$ regulär und beschränkt bzw. regulär und gleichmäßig stetig ist [Norm: $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1} |a(z)|$, vgl. § 8]. $\mathfrak{R}_R$ sei die Menge der $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}_B$, bei denen $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ für alle ζ mit $|\zeta| = 1$ existiert (aber nicht notwendig gleichmäßig). Nach Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) ist $\mathfrak{R}_R$ ein *BK*-Raum mit derselben Norm wie $\mathfrak{R}_B$.

Hilfssatz 12.2 (Randwerte bei beschränkten unstetigen Funktionen). *Es gibt eine in* $|z|<1$ *reguläre und beschränkte Funktion* $a(z)$, *bei der zwar alle Grenzwerte* $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ ($|\zeta| = 1$) *existieren, die aber (nach Erweiterung des Definitionsbereiches) in* $|z|\leq 1$ *unstetig ist; d.h. es gilt* $\mathfrak{R}_R \not\subset \mathfrak{R}_S$.

Beweis. Die Schwierigkeit liegt hier wieder darin, daß $\mathfrak{R}_R$ und $\mathfrak{R}_S$ abgeschlossene Unterräume in $\mathfrak{R}_B$ sind, so daß für den Nachweis $\mathfrak{R}_R \not\subset \mathfrak{R}_S$ die Methode des Vergleichs der Halbnormen (7.2) versagt. Wir greifen auf den gleitenden Buckel zurück (s. § 4); wir wählen eine Folge von paarweise und zur reellen Achse fremden Kreisscheiben

$$K_n = \{|z - \mu_n| < \nu_n\} \quad \text{mit} \quad |\mu_n| = 1, \quad \mu_n \to 1, \quad \nu_n \to 0.$$

Es sei $a^{(n)}(z)$ eine in $|z|<1$ reguläre und gleichmäßig stetige Funktion mit den Eigenschaften

$$a^{(n)}(\mu_n)=5,$$
$$|a^{(n)}(z)|\leqq 5 \qquad (|z|\leqq 1),$$
$$|a^{(n)}(z)|<2^{-n} \quad (|z|\leqq 1,\ z\notin K_n).$$

Eine solche Funktion erhält man in der Gestalt $a^{(n)}(z)=\frac{\alpha}{z-\lambda_n}$ mit $\lambda_n=\Theta_n\mu_n$, $\Theta_n>1$ und nahe bei Eins. $a(z)=\sum a^{(n)}(z)$ konvergiert gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereich von $|z|\leqq 1$, der $z=1$ nicht enthält, ferner gleichmäßig in $0\leqq z\leqq 1$. Daher existieren alle Grenzwerte $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ $(|\zeta|=1)$. Weiter ist $|a(z)|\leqq 2+5$ für $|z|\leqq 1$. Schließlich ist $a(z)$ nicht stetig bei $z=1$ bezüglich $|z|\leqq 1$, weil in jeder Umgebung von $z=1$ Punkte mit $|a(z)|\leqq\sum 2^{-n}=2$ (z „zwischen" den K_n) und Punkte mit $|a(z)|\geqq 5-\sum 2^{-n}=3$ $(z=\mu_n)$ vorhanden sind.

Satz 12.3 (Randwerte bei Funktionen, die auf dem ganzen Rand unstetig sind). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$ *mit* $\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|a(z)|<\infty$, *so daß* $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ $[=a(\zeta)$ *gesetzt*$]$ *für alle* ζ *mit* $|\zeta|=1$ *existiert und* $a(\zeta)$ *auf keinem Teilbogen von* $|\zeta|=1$ *stetig ist.*

Beweis. Wir wählen eine Folge von abgeschlossenen Bögen B_j (von streng positiver Länge) des Kreises $|\zeta|=1$, so daß in jedem Teilbogen von $|\zeta|=1$ ein B_j enthalten ist. $\mathfrak{R}_S(B_j)$ sei wieder der FK-Raum der $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}$, bei denen $\lim_{\varrho\to 1-} a(\varrho\zeta)$ gleichmäßig für $\zeta\in B_j$ existiert (vgl. bei 12.1). Der Beweis zu 12.2 zeigt, daß für jedes einzelne j die Beziehung $\mathfrak{R}_R\not\subset\mathfrak{R}_S(B_j)$ besteht. Nach Lemma 7.4 (Vereinigung von FK-Räumen) gilt $\mathfrak{R}_R\not\subset\bigcup_{j=0}^{\infty}\mathfrak{R}_S(B_j)$, womit die Behauptung erwiesen ist.

§ 13. Teilsummen von Potenzreihen stetiger Funktionen.

Übersicht. Wir betrachten den BK-Raum $\mathfrak{R}_S$ der $\mathfrak{a}$, denen eine in $|z|<1$ reguläre und gleichmäßig stetige Funktion $a(z)=\sum a_k z^k$ entspricht. Das bekannte Ergebnis von FEJÉR [1910], daß $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^k$ $(\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}_S)$ für gewisse ζ mit $|\zeta|=1$ divergieren kann, ordnet sich unserem Ideenkreis ein (13.1 und 13.2). (Hier wurden schon früher funktionalanalytische Methoden verwendet, s. etwa ZYGMUND [1935, S. 172].) 13.3 behandelt das Verhalten von $\sum_{k=0}^{n} a_k$ $(\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}_S)$ für $n\to\infty$.

Hilfssatz 13.1 (Fejérpolynome). *Zu jedem* $M>0$ *gibt es eine abbrechende Stelle* $\mathfrak{a}$ *mit*

$$|a(z)|<1 \qquad (|z|<1),$$

$$\overline{\operatorname{fin}}_{n=0,1,\ldots}\sum_{k=0}^{n} a_k>M.$$

Beweis. Man erhält $a(z)$ in der Form

$$a(z)=\alpha\cdot z^{m+1}\cdot h^{(m)}(z)=\alpha\cdot z^{m+1}\left(-\frac{z^{-m-1}}{m+1}-\cdots-\frac{z^{-1}}{1}+\frac{z}{1}+\cdots+\frac{z^{m+1}}{m+1}\right)$$

(α, m geeignet gewählt). Denn es ist für $|\zeta| = 1$

$$h^{(m)}(\zeta) = 2\,Im\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\zeta^k}{k}\right).$$

Aus

$$\left|Im\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k}\right)\right| = |Im \log(1-\zeta)| \leq \frac{\pi}{2}$$

erhält man nach einer bekannten Schlußweise (s. LANDAU [1929, S. 63] oder KNOPP [1947, S. 519]), daß die $h^{(m)}(z)$ in $|z| = 1$, also auch in $|z| \leq 1$ gleichmäßig beschränkt sind, wogegen die Summen der m ersten Koeffizienten von $h^{(m)}(z)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ eine unbeschränkte Folge bilden, woraus sofort die Behauptung erhellt.

Wir betrachten nun die *BK*-Räume $\mathfrak{T}_C$, $\mathfrak{T}_C(\zeta^k)$, $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{R}_S$ der Stellen $\mathfrak{a}$, für die $\sum a_k$ konvergiert, $\sum a_k \zeta^k$ konvergiert, $a(z)$ in $|z| < 1$ regulär und beschränkt ist, $a(z)$ in $|z| < 1$ regulär und gleichmäßig stetig ist [Normen bzw.

$$\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|, \qquad \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k \zeta^k\right|, \qquad \overline{\underset{|z|<1}{\text{fin}}} |a(z)|, \qquad \overline{\underset{|z|<1}{\text{fin}}} |a(z)|,$$

vgl. § 2 und § 8].

Satz 13.2 (FEJÉR; Stetige Funktionen mit divergenter Potenzreihe). *Ist D irgendeine abzählbare Teilmenge von $|\zeta| = 1$, so gibt es ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$, so daß $\sum a_k \zeta^k$ für $\zeta \in D$ divergiert, d.h. es ist*

$$\mathfrak{R}_S \not\subset \bigcup_{\zeta \in D} \mathfrak{T}_C(\zeta^k).$$

Beweis. $\mathfrak{R}_S \not\subset \mathfrak{T}_C$ folgt mit 13.1 aus Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von *FK*-Räumen). Also ist auch $\mathfrak{R}_S \not\subset \mathfrak{T}_C(\zeta^k)$ für jedes einzelne $\zeta \in D$. Lemma 7.4 (Vereinigung von *FK*-Räumen) vollendet den Beweis. — Man sieht, daß man sogar „unbeschränkte Teilsummen für $\zeta \in D$" verlangen kann.

Durch $\mathfrak{a} \to \sum_{k=0}^{n} a_k = S_n$ sind in $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ stetige Linearformen $\mathfrak{s}'_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ erklärt. Die Norm von $\mathfrak{s}'_n$ (s. § 1) bezüglich $\mathfrak{R}_B$ und $\mathfrak{R}_S$ ist dieselbe, und zwar gilt

$$\|\mathfrak{s}'_n\| = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1,3 \ldots (2n-1)}{2,4 \ldots 2n}\right)^2 \quad (= \Gamma_n \text{ gesetzt}).$$

Dabei ist $\Gamma_n \cong \frac{\log n}{\pi}$ (s. LANDAU [1929, S. 26]). Für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_R$ ist daher $\sum_{k=0}^{n} a_k = O(\Gamma_n)$. Weiter gilt

Satz 13.3 (Teilsummen von Potenzreihen stetiger Funktionen).

I. Für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$ gilt $\sum_{k=0}^{n} a_k = o(\Gamma_n)$.

II. Jedoch gibt es zu jeder Nullfolge ε_n ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$ mit $\sum_{k=0}^{n} a_k \neq O(\varepsilon_n \Gamma_n)$.

Beweis. Der bekannte Satz von FEJÉR über die gleichmäßige C_1-Summierbarkeit von Fourierreihen stetiger Funktionen, also auch von Potenzreihen in $|z|<1$ regulärer und gleichmäßig stetiger Funktionen (s. etwa ZYGMUND [1935, S. 45)] zeigt, daß die Menge $\mathfrak{A}$ der abbrechenden Stellen in $\mathfrak{R}_S$ dicht liegt (man könnte von Abschnitts-C_1-Limitierbarkeit sprechen). Es ist

$$\mathfrak{R}_S < \mathfrak{R}_B < \left[\sum_{k=0}^{n} a_k = O(\Gamma_k)\right] \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} < \left[\sum_{k=0}^{n} a_k = o(\Gamma_n)\right],$$

wobei die Zeichen rechts die Menge der $\mathfrak{a}$ bedeuten, bei denen die O- bzw. o-Bedingung erfüllt ist. Diese Mengen sind BK-Räume mit der Norm

$$\|\mathfrak{a}\| = \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}} \frac{1}{\Gamma_n} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right|$$

— man wende Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) und Kriterium 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) an, vgl. auch $\mathfrak{S}_B$ und $\mathfrak{S}_N$ in § 2. Lemma 7.3 (Grundmengenbedingung) mit $\mathfrak{E} = \mathfrak{R}_S$, $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{A}$ liefert die Behauptung I. Behauptung II lautet nach Umformung

$$\mathfrak{R}_S \not< \left[\sum_{k=0}^{n} a_k = O(\varepsilon_n \Gamma_n)\right]$$

und wird auf Grund der Bedeutung von Γ_n mittels Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von FK-Räumen) bewiesen. — Natürlich könnte man hier auch die bekannten Sätze über Folgen linearer Operationen anwenden.

Zusätze. I. In 13.2 kann man sogar erreichen, daß $\sum a_k \zeta^k$ für $|\zeta| = 1$, $\zeta \notin D$ konvergiert. Man konstruiert zunächst ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$, dessen Potenzreihe in $|z|<1$ gleichmäßig beschränkte Teilsummen hat und auf $|\zeta| = 1$ genau im Punkte $\zeta = 1$ divergiert [vgl. Hilfssatz 11.2 (Randwerte bei beschränkten Funktionen)] und fährt ähnlich wie in Satz 11.3 (Nichtexistenz genau abzählbar vieler Randwerte) fort.

II. Man kann auch ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_S$ erhalten, dessen Potenzreihe für $|\zeta| = 1$ konvergiert, aber nicht gleichmäßig (vgl. § 12). Literatur zu I und II: NEDER [1919] und [1920].

III. Varianten zu 13.3 für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_B$ wurden von BOHR [1917] und NEDER [1923] gegeben. Bei den Beweisen verwendet man den gleitenden Buckel (vgl. § 4).

§ 14. Betragssummen bei gleichmäßig konvergenten Potenzreihen.

Übersicht. Wir betrachten den BK-Raum $\mathfrak{P}_G$ der $\mathfrak{a}$, für die $\sum a_k z^k$ in $|z| \leq 1$ gleichmäßig konvergiert (die Norm von $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{P}_G$ ist $\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}}\ \overline{\underset{|z|<1}{\text{fin}}} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|$; vgl. § 2). Wir fragen: Wie groß kann $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ werden

a) bei festem n für ein $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G$ mit $\|\mathfrak{a}\| \leq 1$,

b) bei festem $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G$ für $n \to \infty$?

Unter Verwendung des Hilfssatzes 14.1 geben 14.2 und 14.3 hierauf Antworten, wobei $\sum_{k=0}^{n} |a_k|$ mit $\sqrt{n+1}$ verglichen wird. Dies verschärft Ergebnisse von Szász [1920], der die größere Klasse der in $|z|<1$ beschränkten Funktionen $a(z)$ (also den Raum $\mathfrak{R}_B$) betrachtet. Im Gegensatz zu Szász benötigen wir keine zahlentheoretischen Hilfsmittel. Aus 14.3 folgt in 14.4 eine Aussage über die Konvergenz von $\sum |a_k|^p$ für $\mathfrak{a} \in \mathfrak{P}_G$.

Hilfssatz 14.1 (Stellen mit großer Betragssumme). *Zu jedem* $r = 1, 2, \ldots$ *gibt es eine abbrechende Stelle* $\mathfrak{a} = \{a_0, \ldots, a_{r^2-1}, 0, 0, \ldots\}$ *mit*

$$|a_k| = 1 \quad (k = 0, 1, \ldots, r^2 - 1), \qquad \text{also} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| = r^2$$

und

$$\sum_{k=0}^{l} a_k z^k < 12r \quad (|z| < 1;\ l = 0, 1, \ldots).$$

Beweis. r sei fest gewählt,

$$|\tau| = 1, \qquad \arg \tau = \frac{2\pi}{r}, \qquad \text{also} \qquad \tau^r = 1.$$

Wir wollen die gewünschten Eigenschaften bei

$$a(z) = \sum_{j=0}^{r-1} z^{jr} \frac{1 - (\tau^j z)^r}{1 - \tau^j z} = \sum_{j=0}^{r-1} z^{jr} \frac{1 - z^r}{1 - \tau^j z} = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{z^{jr} - z^{(j+1)r}}{1 - \tau^j z}$$

$$= (1 + z + \cdots + z^{r-1}) + z^r (1 + \cdots + (\tau z)^{r-1}) + \cdots + z^{(r-1)r} (1 + \cdots + (\tau^{r-1} z)^{r-1})$$

nachweisen. Es genügt, die letzte Ungleichung zu bestätigen. Wir nehmen zunächst

$$|z| = 1, \qquad -\frac{2\pi}{r} \frac{1}{2} \leqq \arg z \leqq \frac{2\pi}{r} \frac{1}{2}$$

an und schätzen spezielle Teilsummen ab. Für diese z ist

$$\frac{2\pi}{r} \left(j - \frac{1}{2}\right) \leqq \arg \tau^j z \leqq \frac{2\pi}{r} (j + 1),$$

also

$$|1 - \tau^j z| \geqq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{r} \operatorname{Min} \left(j - \frac{1}{2}, r - j - \frac{1}{2}\right) \geqq \frac{2}{r} \operatorname{Min} (j, r - j) \quad (0 < j < r).$$

Vor Anwendung dieser Abschätzung summieren wir partiell:

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{z^{jr} - z^{(j+1)r}}{1 - \tau^j z} = \frac{z^r}{1 - \tau z} + \sum_{j=1}^{r-2} z^{(j+1)r} \left(\frac{-1}{1 - \tau^j z} + \frac{1}{1 - \tau^{j+1} z}\right) - \frac{z^{rr}}{1 - \tau^{r-1} z}$$

$$= \frac{z^r}{1 - \tau z} + \sum_{j=1}^{r-2} z^{(j+1)r} \cdot \tau^j z \cdot \frac{\tau - 1}{(1 - \tau^j z)(1 - \tau^{j+1} z)} - \frac{z^{rr}}{1 - \tau^{r-1} z} = A + B + C.$$

Wegen

$$|\tau - 1| \leqq \frac{2\pi}{r} \leqq \frac{8}{r}$$

ist der j-te Summand in B dem Betrage nach

$$\leqq 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{r} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{1}{\text{Min}(j, r-j) \cdot \text{Min}(j+1, r-j-1)}.$$

Beachtet man die für $\left[\frac{r}{2}\right] = n = 1, 2, \ldots$ geltenden Ungleichungen

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)\,n} + \frac{1}{n \cdot n} + \frac{1}{n(n-1)} + \cdots + \frac{1}{2 \cdot 1} \leqq 2$$

so ergibt Summation über j

$$|B| \leqq 2 \cdot r \cdot 2 = 4r.$$

Damit ist

$$|A + B + C| \leqq \frac{r}{2} + 4r + \frac{r}{2} = 5r.$$

Berücksichtigung des nullten Summanden $(1 + z + \cdots + z^{r-1})$ für $a(z)$ liefert

$$|a(z)| \leqq r + 5r = 6r.$$

Ebenso erkennt man, daß $6r$ sogar eine Schranke für die Beträge aller Teilsummen der Form

$$\sum_{j=0}^{q} \frac{z^{jr} - z^{(j+1)r}}{1 - \tau^j z} = \sum_{k=0}^{qr-1} a_k z^k \quad (z \text{ wie oben}, \; q = 0, 1, \ldots)$$

ist. Ähnliche Überlegungen stellt man an, wenn $|z| = 1$ ist und $\arg z$ in einem der Intervalle

$$\frac{2\pi}{r}\left(h - \frac{1}{2}\right) \leqq \arg z \leqq \frac{2\pi}{r}\left(h + \frac{1}{2}\right) \quad (h = 1, \ldots, r-1)$$

liegt, wobei man die zuletzt erwähnte $\sum_{j=0}^{q}$ in drei Teile $(j < h, j = h, j > h)$ zerlegt. Man findet

$$\left|\sum_{j=0}^{q}\right| \leqq 5r + r + 5r = 11r \quad (q = 0, 1, \ldots)$$

für $|z| = 1$, also auch für $|z| \leqq 1$, und damit nach naheliegender Zerlegung

$$\left|\sum_{k=0}^{l} a_k z^k\right| \leqq 11r + r = 12r \quad (|z| \leqq 1, \; l = 0, 1, \ldots),$$

w. z. b. w.

Bemerkungen. Die Konstante 12 läßt sich noch verbessern. Hätten wir die Ungleichung für $1 - \tau^j z$ ohne partielle Summation angewandt — wie das z. B. bei LANDAU [1919] und TURÁN [1948] getan wird — so wäre in der Ungleichung für die Teilsummen rechts noch ein Faktor der Größenordnung $\log r$ erschienen. Die Abschätzungen im Beweis zu 14.1 sind auch nützlich bei den in § 15 erwähnten Sätzen über Konvergenz von Potenzreihen.

Wir betrachten die Mengen $\mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{P}_G$, $\mathfrak{L}_p (p \geqq 1)$ der Stellen $\mathfrak{a}$, für die $a(z)$ in $|z|<1$ gleichmäßig beschränkt ist, $\sum a_k z^k$ in $|z|<1$ gleichmäßig konvergiert, $\sum |a_k|^p < \infty$ ist. Diese Mengen sind BK-Räume mit der Norm

$$\overline{\underset{|z|<1}{\text{fin}}}\,|a(z)|, \qquad \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}}\ \overline{\underset{|z|<1}{\text{fin}}}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right|, \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^p\right)^{1/p},$$

Mit Λ_n bezeichnen wir die obere Grenze von $\sum_{k=0}^{n}|a_k|$ für alle $\mathfrak{a}\in\mathfrak{P}_G$, die in $\mathfrak{P}_G$ eine Norm $||\mathfrak{a}|| \leqq 1$ haben. Λ_n ist gewissermaßen die Norm der Abbildung $\mathfrak{a}\to\sum_{k=0}^{n}|a_k|$ im BK-Raum $\mathfrak{P}_G$.

Satz 14.2 (Obere Grenze von $\sum_{k=0}^{n}|a_k|$ bei variablem $\mathfrak{a}$). *Es ist* $\Lambda_n \leqq \sqrt{n+1}$ *und*

$$\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}}\ \frac{\Lambda_n}{\sqrt{n+1}} > 0.$$

Beweis. Nach § 8 (5) gilt $\sum |a_k|^2 \leqq 1$ für jedes $\mathfrak{a}$, das in $\mathfrak{R}_B$ eine Norm $\leqq 1$ hat, also erst recht für jedes $\mathfrak{a}$, das in $\mathfrak{P}_G$ eine Norm $\leqq 1$ hat. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\sum_{k=0}^{n} 1\,|a_k| \leqq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=0}^{n}|a_k|^2},$$

also

$$\sum_{k=0}^{n}|a_k| \leqq \sqrt{n+1}\cdot 1$$

für die genannten $\mathfrak{a}$. — Nach 14.1 gibt es für $r^2 \leqq m+1 < (r+1)^2$ eine abbrechende Stelle $\mathfrak{a}$, deren Norm in $\mathfrak{P}_G$ $\leqq 1$ ist, so daß

$$\sum_{k=0}^{m}|a_k| = \sum_{k=0}^{r^2-1}|a_k| = \frac{1}{12r}r^2 = \frac{r}{12} \geq \frac{1}{12}\left(\sqrt{m+1}-1\right)$$

ist. Daher gilt

$$\Lambda_m \geq \tfrac{1}{12}\left(\sqrt{m+1}-1\right),$$

was die Behauptung ergibt.

Satz 14.3 (Verhalten von $\sum_{k=0}^{n}|a_k|$ für $n\to\infty$).

I. Für jedes $\mathfrak{a}\in\mathfrak{R}_B$ (*d.h. mit* $\overline{\underset{|z|<1}{\text{fin}}}\,|a(z)|<\infty$) *gilt* $\sum_{k=0}^{n}|a_k| = o\left(\sqrt{n+1}\right)$.

II. Hingegen gibt es zu jeder Nullfolge ε_n *ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{P}_G$ (*dessen Potenzreihe also in* $|z|<1$ *gleichmäßig konvergiert*), *so daß* $\sum_{k=0}^{n}|a_k| \neq O\left(\varepsilon_n\sqrt{n+1}\right)$ *gilt.*

Beweis. I. Nach § 8 (5) ist $\mathfrak{R}_B \subset \mathfrak{L}_2$. Es genügt daher,

$$\mathfrak{L}_2 < \left[\sum_{k=0}^{n}|a_k| = o\left(\sqrt{n+1}\right)\right]$$

zu beweisen. Der Ausdruck rechts bedeutet dabei wieder die Menge der $\mathfrak{a}$, die die betreffende o-Bedingung erfüllen. Entsprechend ist der Klammerausdruck mit O an Stelle von o erklärt.

Diese Mengen ($[\ldots]$) sind BK-Räume mit der Norm

$$\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}}\ \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}|a_k|$$

[Kriterium 2.1 (Linearer Unterraum) und 2.2 (Abgeschlossener Unterraum) anwenden; vgl. auch $\mathfrak{Z}_B$ und $\mathfrak{Z}_N$ in § 2]. Jedenfalls ist nach dem Beweis in 14.2

$$\mathfrak{L}_2 < \left[\sum_{k=0}^{n}|a_k| = O\left(\sqrt{n+1}\right)\right].$$

Die Menge $\mathfrak{A}$ der abbrechenden Folgen liegt in $\mathfrak{L}_2$ dicht, es ist

$$\mathfrak{A} < \left[\sum_{k=0}^{n}|a_k| = o\left(\sqrt{n+1}\right)\right].$$

Lemma 7.3 (Grundmengenbedingung) vollendet den Beweis.

II. Aus

$$\mathfrak{P}_G < \left[\sum_{k=0}^{n}|a_k| = O\left(\varepsilon_n\cdot\sqrt{n+1}\right)\right]$$

folgte mit einem gewissen M

$$\overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}}\ \frac{1}{\varepsilon_n\cdot\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}|a_k| \leqq M\cdot \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}}\ \overline{\underset{|z|<1}{\text{fin}}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k z^k\right| \qquad (\mathfrak{a}\in\mathfrak{P}_G)$$

[s. Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von FK-Räumen)], was man mit 14.2 II widerlegt. — Auch hier könnte man mit Operationsfolgen arbeiten, vgl. § 13.

Satz 14.4 (Szász; Divergenz von $\sum|a_k|^p$). *Es gibt ein* $\mathfrak{a}\in\mathfrak{P}_G$, *das keinem* $\mathfrak{L}_p$ *mit* $p<2$ *angehört, d.h. es ist* $\mathfrak{P}_G \not\subset \bigcup_{p<2}\mathfrak{L}_p$.

Bemerkung. Wie bekannt und z.B. aus § 8 (5) abzulesen, gilt $\mathfrak{R}_B < \mathfrak{L}_2$, also auch $\mathfrak{P}_G < \mathfrak{L}_2$.

Beweis. Bei den im Hilfssatz 14.1 genannten $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(1)$ ist

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^p\right)^{1/p} = r^{2/p}, \qquad \overline{\underset{n=0,1,\ldots}{\text{fin}}}\ \left|\sum_{k=0}^{n}a_k z^k\right| \leqq 12\,r,$$

was mit Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen von FK-Räumen) für jedes $p<2$ die Beziehung $\mathfrak{P}_G < \mathfrak{L}_p$ ergibt. Nach Lemma 7.4 (Vereinigung von FK-Räumen) gilt $\mathfrak{P}_G \not\subset \bigcup_{p<2}\mathfrak{L}_p$ (es genügt ja, p eine abzählbare Menge durchlaufen zu lassen).

Andere Beweise.

I. Die gesuchte Stelle $\mathfrak{a}$ kann auch durch „Nebeneinandersetzen" geeigneter Stellen der Form $\alpha_r\cdot\mathfrak{a}(r)$ [$\mathfrak{a}(r)$ wie in 14.1] erhalten werden (Gleitender Buckel in besonders einfacher Form!).

II. Man erhält 14.4 leicht aus 14.3 unter Verwendung der Ungleichung (s. etwa ZYGMUND [1935, S. 65])

$$\sum_{k=0}^{n} 1 \cdot |a_k| \leq (n+1)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p},$$

wobei man entweder zunächst nur $\mathfrak{P}_G \not\subset \mathfrak{L}_p (p<2)$ nachweist und wie oben weiterschließt oder auch direkt $\mathfrak{P}_G \not\subset \bigcup_{p<2} \mathfrak{L}_p$ findet.

III. Kennt man zu jedem $p<2$ ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{P}_B$, $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{L}_p$ (etwa $b(z) = (1+z)^{\sqrt{-1}}$, s. LANDAU [1929, S. 68]), so betrachtet man die Stellen der Form $\{b_k \varrho^k\}$ $(0<\varrho<1)$ und erhält mittels Lemma 7.2 (Vergleich der Halbnormen in FK-Räumen) die Beziehung $\mathfrak{P}_G \not\subset \mathfrak{L}_p$. Weiter wie oben.

IV. Kennt man zu jedem $p<2$ ein $\mathfrak{b} \in \mathfrak{R}_B$, $\mathfrak{b} \notin \mathfrak{L}_p$, so erhält man zu jedem M in der Gestalt $\mathfrak{c} = \{b_0 \varrho^0, \ldots, b_r \varrho^r, 0, 0, \ldots\}$ ein $\mathfrak{c}$ mit

$$\mathfrak{L}_p\text{-Norm}\,\mathfrak{c} \geq M \cdot \mathfrak{R}_B\text{-Norm}\,\mathfrak{c}.$$

Durch „Nebeneinandersetzen" einer genügend großen Zahl dieser $\mathfrak{c}$ gewinnt man ein $\mathfrak{a} = \{c_0, \ldots, c_r, c_0, \ldots, c_r, \ldots, c_0, \ldots, c_r, 0, 0, \ldots\}$ mit

$$\mathfrak{L}_p\text{-Norm}\,\mathfrak{a} \geq (M-1) \cdot \mathfrak{P}_0\text{-Norm}\,\mathfrak{a},$$

was wieder $\mathfrak{P}_G \not\subset \mathfrak{L}_p$ ergibt. Weiter wie oben. Auch könnte man hier die Beziehung $\sum_{k=0}^{n} a_k = O(\log n)$ $(\mathfrak{a} \in \mathfrak{R}_B)$ aus § 13 ausnützen.

§ 15. Schlußbemerkungen.

Die Vollständigkeitskriterien in § 2 lassen sich auf Funktionenräume usw. übertragen. Minoranten kann man bei vielen Problemen anwenden, welche die Divergenz eines parameterabhängigen Grenzprozesses auf einer überabzählbaren Parametermenge betreffen (z. B. Existenz einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion). Die Anwendungen der Sätze in §§ 4 bis 7 beschränken sich natürlich nicht auf die Funktionentheorie. Zu §§ 10 bis 12: Statt $\lim_{\varrho \to 1-} a(\varrho \zeta)$ können auch andere Grenzprozesse, etwa $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$ betrachtet werden. Im Falle $\sum a_k \zeta^k$ sind entsprechende Sätze schon bekannt (s. HERZOG-PIRANIAN [1949] und dort angegebene Literatur).

Die FK-Räume passen sich nicht allen funktionentheoretischen Problemen an. So bilden z. B. die Stellen $\mathfrak{a}$, denen eine in $|z| \leq 1$ reguläre Funktion $a(z)$ entspricht, keinen FK-Raum, und die in $\mathfrak{R}_B$ durch die Norm definierte Topologie ist unhandlich, weil $\mathfrak{R}_B$ mit ihr zu einem inseparablen Raum wird. Man wird daher versuchen, die Ergebnisse dieser Arbeit auf Räume mit andersartigen Topologien zu übertragen. Erfolgsmöglichkeiten bieten sich bei vollkommenen Räumen (vgl. KÖTHE [1950]) und bei Räumen, die Vereinigung von F-Räumen sind (s. etwa ZELLER [1952]).

Es war nicht unser Ziel, möglichst viele Sätze aufzustellen oder Sätze möglichst zu verschärfen, sondern wir wollten an Beispielen die eingeschlagenen

Beweiswege erläutern. Die Arbeit bringt daher weniger neue Sätze als vielmehr neue Beweise. Kennt man die Methoden, so hat man ein Gefühl für die zu erwartenden Ergebnisse und wird bei Bedarf die vermuteten Sätze beweisen. Besser als durch eine Anhäufung spezieller Resultate wird die Struktur eines Gebietes der Mathematik durch die in ihm erfolgreichen Methoden beleuchtet.

Literatur.

BANACH, S. 1931: Über die Bairesche Kategorie gewisser Funktionenmengen. Studia math. **3**, 174—179. — BANACH, S. 1932: Théorie des opérations linéaires. 252 S. Warschau. — BANACH, S., u. H. STEINHAUS 1927: Sur le principe de la condensation de singularités. Fundamenta math. **9**, 50—61. — BIEBERBACH, L. 1931: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. II, Moderne Funktionentheorie. 2. Aufl., 370 S. Leipzig. — BIEBERBACH, L. 1934: Lehrbuch der Funktionentheorie. Bd. I, Elemente der Funktionentheorie. 4. Aufl. 322 S. Leipzig. — BOHR, H. 1917: Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe. I, II. Göttinger Nachr. **1916**, 276—291; **1917**, 119—128. — BOURBAKI, N. 1940: Topologie générale. Structures topologiques et structures uniformes. 129 S. Paris. — BOURBAKI, N. 1948: Topologie générale. Utilisation des nombres réels en topologie générale. 96 S. Paris. — CARATHÉODORY, C. 1927: Vorlesungen über reelle Funktionen. 2. Aufl. 718 S. Leipzig u. Berlin. — DIAS, C. 1951: Espacos vectoriais topológicos sua áplicacão nos espaços funcionais analíticos. São Paulo. — DIEUDONNÉ, J. 1942: La dualité dans les espaces vectoriels topologiques. Ann. Ecole norm. Sup. **59**, 107—139. — DIEUDONNÉ, J., et L. SCHWARTZ 1949: La dualité dans les espaces (*F*) et (*LF*). Ann. Inst. Fourier **1**, 61—101. — DOSS, S. H. 1948: On a linear functional. Proc. Math. Phys. Soc. Egypt **3**, 59—62. — EIDELHEIT, M. 1936: Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen. Studia math. **6**, 139—148. — FANTAPPIÉ, L. 1943: Teoria de los funcionales analyticos y sus aplicaciones. Barcelona. — FEJÉR, L. 1910: Über gewisse Potenzreihen an der Konvergenzgrenze. Münch. Ber. **40**, Nr. 3, 17. — FRÉCHET, M. 1906: Sur quelques points du Calcul Fonctionnel. Palermo Rendiconti **22**, 1—74. — GANAPATHY IYER, V. 1948: On the space of integral functions. I. J. Indian Math. Soc., N. S. **12**, 13—30. — GELFAND, I. 1936: Sur un lemme de la théorie des espaces linéaires. Commun. Inst. Sci. math. méc. Univ. Kharkoff Soc. math. Kharkoff (4) **13**, 35—40. — GROTHENDIECK, A. 1953: Sur certains espaces des fonctions holomorphes. Erscheint im J. reine angew. Math. — GUTZMER, A. 1888: Ein Satz über Potenzreihen. Math. Ann. **32**, 596—600. — HERZOG, F., and G. PIRANIAN 1949: Sets of convergence of Taylor series. I. Duke Math. J. **16**, 529—534. — HILLE, E. 1948: Functional Analysis and Semi Groups. 528 S. New York. — KIERST, S., u. E. SZPILRAJN 1933: Sur certaines singularités des fonctions analytiques uniformes. Fundamenta math. **21**, 276—294. — KNOPP, K. 1947: Theorie und Anwendung der Unendlichen Reihen. 4. Aufl. 583 S. Berlin. — KÖTHE, G. 1947: Zusammenhänge zwischen der Funktionentheorie und der Theorie der Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Ber. Math. Tagung Tübingen 1946, S. 92—94. — KÖTHE, G. 1951: Neubegründung der Theorie der vollkommenen Räume. Math. Nachr. **4**, 70—80. — KÖTHE, G. 1952: Die Randverteilungen analytischer Funktionen. Math. Z. **57**, 13—33. — KÖTHE, G. 1953: Dualität in der Funktionentheorie. Erscheint im J. reine angew. Math. — KOLMOGOROFF, A. 1934: Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen Raumes. Studia math. **5**, 29—33. — LANDAU, E. 1919: Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn CARLEMAN „Über die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion". Math. Z. **5**, 147—153. — LANDAU, E. 1929: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. 2. Aufl. 122 S. Berlin. — LEBESGUE, G. 1909: Sur les intégrales singulières. Toulouse Ann. (3) **1**, 25—117. — LUSIN, N., et J. PRIWALOFF 1925: Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques. Ann. Ecole norm. (3) **42**, 143—191. — MARCOUCHEWITCH, A. 1945: Sur les bases dans l'espace des fonctions analytiques. Rec. Math. Mat. Sbornik. N. S. **17** (59) 211—252. —

Mazur, S., u. W. Orlicz 1933: Über die Folgen linearer Operationen. Studia math. **4**, 152—157. — Neder, L. 1919: Zur Konvergenz der trigonometrischen Reihen einschließlich der Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise. Diss. Göttingen, 45 S. — Neder, L. 1920: Konvergenzdefekte stetiger Funktionen auf dem Rand des Konvergenzkreises. Math. Z. **6**, 262—269. — Neder, L. 1923: Über die Koeffizientensumme einer beschränkten Potenzreihe. Math. Z. **11**, 115—123. — Ostrowski, A. 1923: Über allgemeine Konvergenzsätze der komplexen Funktionentheorie. Dtsch. Math.-Ver. **32**, 185—194. — Polya, G. 1917: Über die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist. Acta math. **41**, 99—118. — Riesz, F. u. M. 1916: Über die Randwerte einer analytischen Funktion. Quatrieme Congr. des math. scand. 1916, 27—44. — Schauder, J. 1930: Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen. Studia math. **2**, 1—6. — Schur, I. 1920: Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. Math. **151**, 79—111. — Silva, J. S. 1950: As funcoes analiticas e a analise funcional. Port. Math. **9**, 1—130. — Steinhaus, H. 1919: Sur les défauts de convergence des séries trigonométriques et potentielles. Krkh.-Anz. **1919**, 123—141. — Szász, O. 1920: Über Potenzreihen, die im Einheitskreis beschränkte Funktionen darstellen. Math. Z. **8**, 222—236. — Taylor, A. E. 1950: Weak convergence in the spaces H_p. Duke Math. J. **17**, 409—418. — Taylor, A. E. 1951: Banach spaces of functions analytic in the unit circle. I, II. Studia math. **11**, 145—170; **12**, 25—50. — Toeplitz, O. 1911: Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace mat.-fiz. **22**, 113—119. — Toeplitz, O. 1949: Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie. Comment. Math. Helv. **23**, 222—242. — Turán, P. 1948: On some examples in the theory of power series. Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 932—936. — Zeller, K. 1951: Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z. **53**, 463—487. — Zeller, K. 1951: Abschnittskonvergenz in *FK*-Räumen. Math. Z. **55**, 55—70. — Zeller, K. 1952: Über Stetigkeit von Integraltransformationen. Math. Z. **55**, 167—182. — Zygmund, A. 1935: Trigonometrical series. 331 S. Warschau-Lwow.

Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen sind dem Verfasser weitere Veröffentlichungen bekanntgeworden, die sich mit der vorliegenden Arbeit berühren und einige unserer Ergebnisse enthalten. — Ganapathy Iyer: On the space of integral functions. II. Quart. J. Math. Oxford (2) **1**, 86—96 (1950). (Lineare Funktionale im Raum der ganzen Funktionen.) — Herzog, F., and G. Piranian: Bull. Amer. Math. Soc. **58**, 639 (1952); sowie: Sets of convergence of Taylor Series. II. Duke Math. J. **20**, 41—54 (1953). (Konvergenz der Potenzreihe am Rande, Existenz von Randwerten.) — Ryll-Nardzewski, C., u. H. Steinhaus: Sur les séries de Taylor. Studia math. **12**, 159—165 (1951). (Nichtfortsetzbare Funktionen.)

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 24. Februar 1953.)

Schäfke, F. W.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 436—447 (1953)

Das Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen.

Von
Friedrich Wilhelm Schäfke.

Als Additionstheorem der Zylinderfunktionen bezeichnet man die Formel, die — physikalisch-anschaulich gesprochen — die Zylinderwellen einer gegebenen Achse als Überlagerung von Zylinderwellen einer anderen, der ersten parallelen Achse darstellt, die also — mathematisch ausgedrückt — eine in einem Polarkoordinatensystem separierte Lösung der ebenen Schwingungsgleichung in eine Reihe nach Lösungen entwickelt, die in einem anderen Polarkoordinatensystem separiert sind. Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen nenne ich die entsprechende, wesentlich allgemeinere Formel für elliptische Zylinderwellen mit paralleler Zylinderachse, jedoch beliebiger Lage der beiden ebenen elliptischen Koordinatensysteme. Sie wird hier für den weitest möglichen Gültigkeitsbereich der komplexen Variabeln und Parameter hergeleitet.

Die Herleitung beruht — neben den Invarianzeigenschaften der Schwingungsgleichung — auf drei Prinzipien, die sich ähnlich auch in anderen Gebieten der Theorie der speziellen Funktionen als überaus fruchtbar erweisen:

I. Jede in einem Streifen parallel der reellen Achse regulär analytische Funktion $f(t)$ mit der Eigenschaft $f(t+2\pi) \equiv e^{2\pi i \nu} f(t)$ (ν beliebig komplex) läßt sich dort für alle zu ν und $\nu+1$ gehörenden normalen Werte des Parameters h^2 der Mathieuschen Differentialgleichung — das sind jeweils alle komplexen h^2 bis auf abzählbar viele ohne endlichen Häufungspunkt — in eine Reihe nach Mathieuschen Funktionen (zu verschiedenen Werten des Parameters λ) mit derselben Eigenschaft entwickeln. Für die Koeffizienten gelten Integralformeln.

II. Jede Lösung der ebenen Schwingungsgleichung kann bei geeigneter Wahl des Integrationsweges als Kern einer Integralbeziehung zwischen Mathieuschen Funktionen und modifizierten Mathieuschen Funktionen dienen.

III. Es gibt modifizierte Mathieusche Funktionen, deren asymptotisches Verhalten für $\Re z \to +\infty$ mit dem der Zylinderfunktionen erster bis vierter Art vom Argument $2h \mathfrak{Cos} z$ übereinstimmt; sie sind hierdurch eindeutig bestimmt.

Diese drei Prinzipien werden zum Beweise des Additionstheorems so verwandt, daß zunächst gemäß I eine Entwicklung bezüglich einer Variablen erhalten wird, dann vermittels II auf die Abhängigkeit der Koeffizienten von der zweiten Variablen geschlossen wird und schließlich die genaue Gestalt dieser Koeffizienten gemäß III durch Vergleich des asymptotischen Verhaltens gewonnen wird.

Das Additionstheorem und die ihm gleichwertigen bei der Koeffizientenbestimmung auftretenden Integralrelationen sind von sehr großer Allgemeinheit. Durch Spezialisierung ergibt sich natürlich das Additionstheorem der Zylinderfunktionen, wenn man beide elliptischen Koordinatensysteme zu Polarkoordinaten ausarten läßt. Bei nur einer Ausartung erhält man Entwicklungen von elliptischen Zylinderwellen nach Kreiszylinderwellen und umgekehrt sowie die entsprechenden Integralrelationen. [Sie sind Verallgemeinerungen von Beziehungen, die J. MEIXNER[1]) auf anderem Wege bewiesen hat.] Diese Formeln enthalten unmittelbar alle wichtigen Reihenentwicklungen der Theorie der MATHIEUschen Funktionen; das gilt auch für die SIEGERschen Reihen nach Produkten von BESSEL- und Zylinderfunktionen der Argumente $h e^{-z}$ und $h e^{z}$. Auf weitere mögliche Folgerungen, etwa die Ausartungen zu parabolischen oder kartesischen Koordinaten, wird nicht eingegangen.

Dem eigentlichen Beweise des Additionstheorems ist ein Abschnitt vorangestellt, in dem die benötigten Definitionen und Sätze aus der Theorie der MATHIEUschen Funktionen, unter anderem die drei genannten Prinzipien, ohne Beweise oder höchstens mit Beweisandeutungen notiert werden. Sie sind zum großen Teile neu; das gilt insbesondere für Satz 2 und die vorangehenden Definitionen und Resultate. Der Leser sei hierzu auf ein beim Springer-Verlag in Vorbereitung befindliches Werk, J. MEIXNER-F. W. SCHÄFKE, MATHIEUsche Funktionen, Sphäroidfunktion und ihre Anwendungen, hingewiesen. Bezüglich der historischen Entwicklung der Theorie der MATHIEUschen Funktionen seien noch E. T. WHITTAKER-G. N. WATSON[2]), M. J. O. STRUTT[3]) und N. W. MCLACHLAN[4]) genannt.

I. Grundlagen.

1.1. Die Schwingungsgleichung

$$\Delta u + k^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + k^2 u = 0 \tag{1}$$

erhält durch Einführung elliptischer Koordinaten mit

$$x_1 \pm i\, x_2 = c\, \mathfrak{Cof}\,(z \pm i\, t) \qquad (c \neq 0) \tag{2}$$

die Gestalt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2h^2 \mathfrak{Cof}\, 2z \cdot u = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2h^2 \cos 2t \cdot u; \tag{3}$$

dabei ist

$$h = \tfrac{1}{2} k\, c. \tag{4}$$

Das gilt nicht allein im Reellen; man kann x_1, x_2 bzw. z, t als komplexe Variable auffassen und k, c $(\neq 0)$ beliebig komplex zulassen.

[1]) Vgl. Fußnote 10 S. 445 und Fußnote 11 S. 446.

[2]) WATSON, G. N.: Mod. Analysis. 1927.

[3]) STRUTT, M. J. O.: LAMÉsche, MATHIEUsche und verwandte Funktionen in Physik und Technik. 1932.

[4]) MCLACHLAN, N. W.: Theory and Application of Mathieu Functions. 1947.

(3) hat die separierten Lösungen

$$u(z,t) = Y(z)\, y(t),$$

wobei $y(t)$ eine MATHIEUsche Funktion ist, der MATHIEUschen Differentialgleichung

$$y''(t) + (\lambda - 2h^2 \cos 2t)\, y(t) = 0 \tag{5}$$

genügt, und $Y(z)$ eine modifizierte MATHIEUsche Funktion ist, d.h. die modifizierte MATHIEUsche Differentialgleichung

$$-Y''(z) + (\lambda - 2h^2 \mathfrak{Cof}\, 2z)\, Y(z) = 0 \tag{6}$$

erfüllt. (5) und (6) sind durch den Separationsparameter λ gekoppelt. Die beiden Differentialgleichungen gehen mit $t = \pm i z$ ineinander über.

Der enge Zusammenhang zwischen (3), (5) (6) liefert — durch partielle, Integration — noch den

Satz 1: *Ist $\mathfrak{C}$ ein Weg der komplexen t-Ebene, $u(z,t)$ eine für z in einem Bereiche $\mathfrak{B}$ und t auf $\mathfrak{C}$ regulär analytische Lösung von (3), $y(t)$ eine Lösung von (5), so ist*

$$Y(z) = \int_{\mathfrak{C}} u(z,t)\, y(t)\, dt$$

eine Lösung von (6), wenn

$$u(z,t)\, y'(t) - y(t) \frac{\partial}{\partial t} u(z,t)$$

an den Enden von $\mathfrak{C}$ denselben Wert hat und das Integral, falls uneigentlich, für z in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig konvergiert.

1.2. (5) ist eine HILLsche Differentialgleichung mit der Periode π. Ist $y_{\mathrm{I}}(t)$ die Lösung mit den Anfangswerten

$$y_{\mathrm{I}}(0) = 1, \qquad y_{\mathrm{I}}'(0) = 0,$$

so erkennt man nach dem Theorem von FLOQUET die Gleichung

$$\cos \pi \nu = y_{\mathrm{I}}(\pi; \lambda, h^2) \tag{7}$$

als notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung

$$y = me_\nu t$$

mit der Eigenschaft

$$me_\nu(t + \pi) \equiv e^{\pi i \nu}\, me_\nu t \not\equiv 0. \tag{8}$$

Wir bezeichnen ν als charakteristischen Exponenten von (5).

Ist $y_{\mathrm{II}}(t)$ die Lösung von (5) mit

$$y_{\mathrm{II}}(0) = 0, \qquad y_{\mathrm{II}}'(0) = 1,$$

so gilt

$$y_{\mathrm{I}}(\pi) - 1 = 2 y_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2}\right) y_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2}\right), \qquad y_{\mathrm{I}}(\pi) + 1 = 2 y_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2}\right) y_{\mathrm{II}}'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Daher zerfällt (7) für ganzes ν in

$$(9)\qquad \begin{cases} \text{(I)} & y_{\mathrm{I}}'\left(\frac{\pi}{2};\lambda,h^2\right)=0, \\ \text{(II)} & y_{\mathrm{I}}\left(\frac{\pi}{2};\lambda,h^2\right)=0, \\ \text{(III)} & y_{\mathrm{II}}'\left(\frac{\pi}{2};\lambda,h^2\right)=0, \\ \text{(IV)} & y_{\mathrm{II}}\left(\frac{\pi}{2};\lambda,h^2\right)=0, \end{cases}$$

und zwar für gerades ν in (I) und (IV), für ungerades ν in (II) und (III). Das entspricht der Einteilung der ganzperiodischen und halbperiodischen Lösungen in gerade [(I), (II)] und ungerade [(IV), (III)].

Die rechte Seite von (7) und die linken Seiten von (9) sind ganze Funktionen von λ, h^2.

Wir nennen nun h^2 einen *normalen Wert* zu ν, wenn bei nicht ganzem ν (7), bei ganzem ν jede der beiden entsprechenden Gln. (9) nur einfache Wurzeln λ besitzt, anderenfalls *Ausnahmewert*. Zu jedem ν gibt es nur abzählbar viele Ausnahmewerte ohne endlichen Häufungspunkt.

Die Wurzeln λ von (7) schreiben wir

$$\lambda=\lambda_{\nu+2r}(h^2)\qquad (r=\cdots,-1,0,1,2,\ldots).$$

Sie hängen für normales h^2 regulär analytisch von h^2 ab. Durch geeignete Verzweigungsschnitte und die Verabredung

$$\lambda_\nu(0)=\nu^2,$$

bei ganzem ν zusätzlich durch die Wahl nicht negativer Indizes ν zu Lösungen von (I), (II) und negativer Indizes ν zu Lösungen von (III), (IV), können diese Funktionen in der gesamten h^2-Ebene eindeutig festgelegt werden. (Für nicht ganzes ν ist natürlich $\lambda_{-\nu}=\lambda_\nu$).

Die zu

$$\lambda=\lambda_\nu(h^2)$$

gehörende — zunächst nur bis auf einen willkürlichen Faktor bestimmte — FLOQUETsche Lösung (8) schreiben wir

$$y=me_\nu(t;h^2).$$

Diese Funktion kann, solange $\lambda_\nu(h^2)$ einfache Wurzel der betreffenden Gl. (7) bzw. (9) ist, eindeutig festgelegt werden, wenn man Regularität in h^2, die Normierung

$$(10)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi me_\nu t\cdot me_\nu(-t)\,dt=1$$

und

$$(11)\qquad me_\nu(t;0)=\begin{cases} e^{i\nu t} & (\nu \text{ nicht ganz oder } \nu=0) \\ 2^{\frac{1}{2}}\cos\nu t & (\nu=1,2,3,\ldots) \\ 2^{\frac{1}{2}}\sin\nu t & (\nu=-1,-2,-3,\ldots), \end{cases}$$

fordert. Für nicht ganzes ν ist $me_{-\nu}(z)=me_\nu(-z)$.

Es gilt dann

Satz 2: *Ist h^2 normaler Wert zu ν und zu $\nu+1$, so gelten die Biorthogonalitäts- und Normierungsrelationen*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\tau}^{\tau+2\pi} me_{\nu+r}(t;h^2)\, me_{\nu+s}(-t;h^2)\,dt = \delta_{rs}$$

(τ beliebig). Jede in einem Streifen parallel der reellen Achse regulär analytische Funktion $f(t)$ mit $f(t+2\pi)\equiv e^{2\pi i\nu} f(t)$ kann dann dort in eine Reihe

$$f(t) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} f_r\, me_{\nu+r}(t;h^2)$$

entwickelt werden; sie konvergiert in jeder kompakten Teilmenge absolut gleichmäßig[5]*. Die Koeffizienten sind*

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\int_{\tau}^{\tau+2\pi} f(t)\, me_{\nu+r}(-t;h^2)\,dt.$$

Die FLOQUETschen Lösungen lassen sich in FOURIER-Reihen entwickeln:

$$me_\nu(t;h^2) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} c_{2r}^{\nu}(h^2)\, e^{i(\nu+2r)t}. \tag{12}$$

Die Koeffizienten genügen der linearen dreigliedrigen Rekursion

$$-h^2 c_{2r+2}^{\nu} + \left(\lambda-(\nu+2r)^2\right) c_{2r}^{\nu} - h^2 c_{2r-2}^{\nu} = 0;$$

sie können hieraus, ebenso wie $\lambda_\nu(h^2)$, mit Hilfe unendlicher Kettenbrüche berechnet werden.

Der Zusammenhang mit den bekannten, zu

$$\int_0^{2\pi} y^2(t)\,dt = \pi$$

normierten Funktionen ganzer Ordnung

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && ce_{2n}(t;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{2n}(h^2)\cos 2rt,\\
&(\mathrm{II}) && ce_{2n+1}(t;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r+1}^{2n+1}(h^2)\cos(2r+1)t,\\
&(\mathrm{III}) && se_{2n+1}(t;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{2n+1}(h^2)\sin(2r+1)t,\\
&(\mathrm{IV}) && se_{2n+2}(t;h^2) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+2}^{2n+2}(h^2)\sin(2r+2)t
\end{aligned}\right\} (n=0,1,2,\ldots)$$

[5] Ist ν ganz und der Streifen nicht symmetrisch zur reellen Achse, so sind dabei stets die Terme mit me_m und me_{-m} $(m=1,2,3,\ldots)$ zu einem Reihenglied zusammenzufassen.

wird durch

$$\begin{aligned} ce_m(t;h^2) &= 2^{-\frac{1}{2}}\, me_m(t;h^2) \qquad (m=0,1,2,\ldots),\\ se_m(t;h^2) &= 2^{-\frac{1}{2}} i\, me_{-m}(t;h^2) \qquad (m=1,2,3,\ldots),\\ A_0^{2n}(h^2) &= 2^{-\frac{1}{2}} c_{-2n}^{2n}(h^2),\\ A_k^m(h^2) &= 2^{\frac{1}{2}} c_{k-m}^m(h^2) = 2^{\frac{1}{2}} c_{-k-m}^m(h^2)\\ B_k^m(h^2) &= 2^{\frac{1}{2}} c_{-k+m}^{-m}(h^2) = -2^{\frac{1}{2}} c_{k+m}^{-m}(h^2) \end{aligned} \Bigg\} \quad (k>0)$$

vermittelt. Die zugehörigen Eigenwerte sind

$$\begin{aligned} a_m(h^2) &= \lambda_m(h^2) \qquad (m=0,1,2,\ldots),\\ b_m(h^2) &= \lambda_{-m}(h^2) \qquad (m=1,2,3,\ldots). \end{aligned}$$

1.3. Führt man neben (2) noch das Polarkoordinatensystem R, φ mit

$$x_1 \pm i\, x_2 = R\, e^{\pm i\varphi} = c\, \mathfrak{Cof}\,(z \pm i\, t)$$

ein und wählt in Satz 1 speziell[6])

$$y(t) = me_\nu(t;h^2), \quad u(z,t) = \mathfrak{Z}_{\nu+2s}^{(j)}(k\,R)\, e^{-i(\nu+2s)\varphi}$$

mit ganzem s, so erhält man für $\Re e\, z > 0$ durch

$$(13) \qquad (-1)^s c_{2s}^\nu(h^2)\, M_\nu^{(j)}(z;h) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathfrak{Z}_{\nu+2s}^{(j)}(k\,R)\, e^{-i(\nu+2s)\varphi}\, me_\nu(t;h^2)\, dt$$

Lösungen der modifizierten MATHIEUschen Differentialgleichung (6) zu $\lambda = \lambda_\nu(h^2)$,

$$Y(z) = M_\nu^{(j)}(z;h)$$

mit dem asymptotischen Verhalten

$$(14) \qquad M_\nu^{(j)}(z;h) \sim \mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(2h\,\mathfrak{Cof}\, z) \qquad (\Re e\, z \to +\infty),$$

was für $j = 3, 4$ bei beschränktem $\Im m\, z$

$$(15) \qquad M_\nu^{(j)}(z;h) = \mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(2h\,\mathfrak{Cof}\, z)\,(1 + O(\mathfrak{Cof}\, z)^{-1})$$

bedeuten soll.

2. Hilfssätze.

Betrachten wir zunächst in der reellen (x_1, x_2)-Ebene zwei elliptische Koordinatensysteme. Eines sei, mit $c > 0$ das System (2). Das andere möge die Exzentrizität $c_0 > 0$ besitzen, die Polarkoordinaten seines Zentrums seien $\varrho\,(\geqq 0)$, ψ, schließlich sei α der Winkel der beiden Halbgeraden $t = 0$ und $t_0 = 0$. Dann wird der Zusammenhang beider Systeme durch die beiden Gleichungen

$$(16) \qquad c\,\mathfrak{Cof}\,(z \pm i\, t) = \varrho\, e^{\pm i\psi} + c_0\, e^{\pm i\alpha}\,\mathfrak{Cof}\,(z_0 \pm i\, t_0)$$

ausgedrückt.

[6]) $\mathfrak{Z}^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ bedeutet der Reihe nach die BESSELsche, NEUMANNsche, erste und zweite HANKELsche Zylinderfunktion: J, N, $H^{(1)}$, $H^{(2)}$.

Sind dann $z_1 (\geqq 0)$, $z_2 (\geqq 0)$ die elliptischen z-Koordinaten der Brennpunkte des zweiten Systems, und ist

$$A = \max (z_1, z_2),$$

so sind für

$$z > A, \quad -\infty < t < \infty$$

durch (16) und die Verabredung $z_0 > 0$ die Koordinaten $z_0 = z_0(z, t)$, $t_0 = t_0(z, t)$ eindeutige analytische Funktionen von z, t mit

$$z_0(z, t + 2\pi) = z_0(z, t), \qquad t_0(z, t + 2\pi) = t_0(z, t) + 2\pi.$$

Ist $v(z_0, t_0)$ eine für reelle z_0, t_0 regulär analytische Lösung der auf die elliptischen Koordinaten z_0, t_0 umgeschriebenen Schwingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_0^2} + 2h_0^2 \mathfrak{Cof}\, 2z_0 \cdot v = -\frac{\partial^2 v}{\partial t_0^2} + 2h_0^2 \cos 2t_0 \cdot v$$

mit

$$h_0 = \tfrac{1}{2} k c_0,$$

so wird

$$u(z, t) = v(z_0, t_0)$$

eine für $z > A$, $-\infty < t < \infty$ regulär analytische Lösung von (3), (4). Das folgt sofort aus der Orthogonalinvarianz von (1).

Diese im Reellen evidenten Tatsachen lassen sich ins Komplexe übertragen. Hier gilt:

Hilfssatz 1. *Seien $c, c_0, \varrho, \psi, \alpha$ komplexe Konstanten, die ersten beiden von 0 verschieden, sei*

$$c\, \mathfrak{Cof}\, \zeta_1 = \varrho\, e^{i\psi} + c_0\, e^{i\alpha},$$

$$c\, \mathfrak{Cof}\, \zeta_2 = \varrho\, e^{i\psi} - c_0\, e^{i\alpha},$$

$$c\, \mathfrak{Cof}\, \zeta_3 = \varrho\, e^{-i\psi} + c_0\, e^{-i\alpha},$$

$$c\, \mathfrak{Cof}\, \zeta_4 = \varrho\, e^{-i\psi} - c_0\, e^{-i\alpha},$$

$$A^+ = \max (\pm \mathfrak{Re}\, \zeta_1, \pm \mathfrak{Re}\, \zeta_2),$$

$$A^- = \max (\pm \mathfrak{Re}\, \zeta_3, \pm \mathfrak{Re}\, \zeta_4),$$

so sind durch die beiden Gleichungen

$$c\, \mathfrak{Cof}\, (z \pm i t) = \varrho\, e^{\pm i\psi} + c_0\, e^{\pm i\alpha}\, \mathfrak{Cof}\, (z_0 \pm i t_0)$$

und die Verabredung

$$\mathfrak{Re}\, (z_0 \pm i t_0) > 0$$

für den (z, t)-Bereich

(B)
$$\mathfrak{Re}\, z - \mathfrak{Im}\, t > A^+$$
$$\mathfrak{Re}\, z + \mathfrak{Im}\, t > A^-$$

die beiden Funktionen

$$z_0 = z_0(z, t), \qquad t_0 = t_0(z, t)$$

eindeutig definiert und regulär analytisch. Man hat

$$z_0(z, t + 2\pi) = z_0(z, t)$$
$$t_0(z, t + 2\pi) = t_0(z, t) + 2\pi.$$

Ist $v(z_0, t_0)$ *eine ganze analytische Lösung von*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z_0^2} + 2h_0^2 \mathfrak{Cof}\, 2z_0 \cdot v = -\frac{\partial^2 v}{\partial t_0^2} + 2h_0^2 \cos 2t_0 \cdot v$$

mit

$$h_0 = \tfrac{1}{2} k c_0$$

und beliebigem komplexem k, *so wird*

$$u(z, t) = v(z_0, t_0)$$

eine für z, t *in* $\mathfrak{B}$ *regulär analytische Lösung von* (3), (4).

Beweis. Man erkennt zunächst — das ist nichts anderes als der reelle Fall —, daß für $\Re z \mp \Im t > A^{\pm}$ jeweils (oberes bzw. unteres Vorzeichen) $\zeta_0 = z_0 \pm i\, t_0$ eine regulär analytische Funktion von $\zeta = z \pm i\, t$ mit $\zeta_0(\zeta \pm 2\pi i) = \zeta_0(\zeta) \pm 2\pi i$ ist. Daraus folgen die Behauptungen bis auf die letzte. Diese wird durch direkte Rechnung bestätigt, deren Ausführung jedoch vermieden wird mit der Bemerkung, daß sie genau so verläuft wie im obigen reellen Falle, in dem das Ergebnis auf Grund der Orthogonalinvarianz bekannt war.

Als Ergänzung zu Hilfssatz 1 benötigen wir Aussagen über das asymptotische Verhalten der Funktionen $z_0(z, t)$, $t_0(z, t)$ für $\Re z \to +\infty$. Wir notieren

Hilfssatz 2: *Für* $\Re z \to +\infty$ *gilt bei beschränktem* $\Im t$ *gleichmäßig*

$$2h_0 \mathfrak{Cof}\, z_0 = 2h\, \mathfrak{Cof}\, z - k\varrho \cos(t - \psi) + O(\mathfrak{Cof}^{-1} z),$$
$$t_0 = t - \alpha + O(\mathfrak{Cof}^{-1} z).$$

Der Beweis ergibt sich durch einfache Rechnung, wenn man die beiden Gln. (16) einmal multipliziert und einmal dividiert.

3. Die Integralrelation.

Wir schließen in Bezeichnungen und Voraussetzungen an Hilfssatz 1 an. Es seien gemäß **1.2.** die normierten Funktionen

$$me_\nu(t_0, h_0^2), \qquad me_{\nu+s}(t; h^2)$$

definiert[7]; s sei eine ganze Zahl. Dann kann in Hilfssatz 1

$$u(z; t) \equiv v(z_0, t_0) = M_\nu^{(j)}(z_0; h_0)\, me_\nu(t_0; h_0^2)$$

gewählt werden. Diese im Bereiche $\mathfrak{B}$ regulär analytische Lösung der (z, t)-Schwingungsgleichung hat die Eigenschaft

$$u(z, t + 2\pi) \equiv e^{2\pi i \nu} u(z, t).$$

[7]) Man erkennt leicht, daß für die Integralrelation allein auf jede Normierung verzichtet werden könnte; sie ist entsprechend homogen.

Daher kann auf das Integral

$$I_s^{(j)}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} M_\nu^{(j)}(z_0; h_0)\, me_\nu(t_0; h_0^2)\, me_{\nu+s}(-t; h^2)\, dt$$

der Satz 1 angewandt werden. Er zeigt, daß diese Funktion für

$$\Re z > \max(A^+ + \Im\vartheta, A^- - \Im\vartheta)$$

eine Lösung der modifizierten MATHIEUschen Differentialgleichung zum Parameterpaar $\lambda_{\nu+s}(h^2), h^2$ ist.

Um welche Lösung es sich handelt, wird nunmehr durch Untersuchung des asymptotischen Verhaltens entschieden.

Wir setzen zuerst $j=4$ und verwenden Hilfssatz 2, **1.3.** (15) und die asymptotischen Formeln der zweiten HANKELschen Zylinderfunktion. Für

$$|\arg 2h\,\mathfrak{Cof}\, z| \leq \pi - \delta \qquad (\delta \geq 0), \qquad \Re z \to +\infty$$

wird damit

$$I_s^{(4)}(z) = \mathfrak{Z}_\nu^{(4)}(2h\,\mathfrak{Cof}\, z)\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\varrho\cos(t-\psi)}\, me_\nu(t-\alpha; h_0^2)\, me_{\nu+s}(-t; h^2)\, dt \cdot \left(1 + O\left(\mathfrak{Cof}^{-1} z\right)\right)$$

Es ist daher

$$I_s^{(4)}(z) = A_s\, M_{\nu+s}^{(j)}(z; h)$$

mit

$$A_s = \frac{i^{-s}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\varrho\cos\tau}\, me_\nu(\tau+\psi-\alpha; h_0^2)\, me_{\nu+s}(-\tau-\psi; h^2)\, d\tau.$$

A_s kann durch die FOURIER-Koeffizienten der Funktionen *me* und Produkte von BESSEL- und Exponentialfunktionen ausgedrückt und damit gegebenenfalls berechnet werden. Man erhält

$$A_s = \sum_{p,q=-\infty}^{+\infty} c_{2p}^{\nu}(h_0^2)\, c_{2q}^{\nu+s}(h^2)\, \frac{i^{-s}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\varrho\cos\tau}\, e^{i(\nu+2p)(\tau+\psi-\alpha)}\, e^{-i(\nu+2q+s)(\tau+\psi)}\, d\tau,$$

also mit Hilfe einer bekannten Integraldarstellung der BESSEL-Funktionen ganzer Ordnung und $p-q=l$

$$(17)\quad A_s = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^{l+s} \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_{2p}^{\nu}(h_0^2)\, c_{2(p-l)}^{\nu+s}(h^2)\, e^{-i(\nu+2p)\alpha}\right] J_{2l-s}(k\varrho)\, e^{i(2l-s)\psi}.$$

Für $j=3$ erhält man mit demselben A_s

$$I_s^{(3)}(z) = A_s\, M_{\nu+s}^{(3)}(z, h).$$

Daher hat man

Satz 3[8]: *Für*

$$\Re z > \max(A^+ + \Im\vartheta, A^- - \Im\vartheta)$$

[8]) In Voraussetzungen und Bezeichnungen ist an Hilfssatz 1 anzuschließen.

gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} M_\nu^{(j)}(z_0;h_0)\,me_\nu(t_0;h_0^2)\,me_{\nu+s}(-t;h^2)\,dt = A_s\,M_{\nu+s}^{(j)}(z;h)$$

$$(j=1,2,3,4), \qquad (s=0,\pm 1,\pm 2,\ldots).$$

Dabei ist A_s *durch* (17) *gegeben.*

4. Das Additionstheorem.

Wir betrachten wie oben die Funktion

$$M_\nu^{(j)}(z_0;h_0)\,me_\nu(t_0;h_0^2) = u(z,t)$$

mit Hilfssatz 1 als Funktion von z, t in $\mathfrak{B}$. Wegen

$$u(z,t+2\pi) \equiv e^{2\pi i\nu}\,u(z,t)$$

kann dann für jedes z auf die Funktion von t im Streifen

$$\Re\mathfrak{e}\,z - A^+ > \Im\mathfrak{m}\,t > -\Re\mathfrak{e}\,z + A^-$$

Satz 2 angewandt werden, falls h^2 normaler Wert zu ν und $\nu+1$ ist. Die Entwicklungskoeffizienten liefert dabei gerade Satz 3. So erhalten wir

Satz 4 (Additionstheorem): *Sei* h^2 *normaler Wert zu* ν *und* $\nu+1$. *Dann gilt mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Hilfssatz 1 für* z, t *im Bereiche* $\mathfrak{B}$:

$$M_\nu^{(j)}(z_0;h_0)\,me_\nu(t_0;h_0^2) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s\,M_{\nu+s}^{(j)}(z;h)\,me_{\nu+s}(t;h^2).$$

Die Koeffizienten A_s *sind durch* (17) *gegeben*[9]).

5. Einige Spezialfälle und Folgerungen.

5.1. Für $c_0 \to 0$ geht das zweite elliptische Koordinatensystem mit

$$2h_0\,\mathfrak{Cof}\,z_0 \to k\,R_0, \qquad t_0 \to \varphi_0$$

in das Polarkoordinatensystem

$$R_0\,e^{\pm i\varphi_0} = c_0\,\mathfrak{Cof}\,(z_0 \pm i\,t_0)$$

über. Hier kann o.B.d.A. $\alpha = 0$ gesetzt werden. Dann ergibt Satz 4 unter den aus Hilfssatz 1 entsprechend zu entnehmenden Voraussetzungen

$$\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(k\,R_0)\,e^{i\nu\varphi_0} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} d_s\,M_{\nu+s}^{(j)}(z;h)\,me_{\nu+s}(t;h^2) \tag{18}$$

mit

$$d_s = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} (-1)^r\,c_{2r}^{\nu+s}(h^2)\,J_{2r+s}(k\,\varrho)\,e^{-i(2r+s)\psi}. \tag{19}$$

Die entsprechenden Integralrelationen sind für den Sonderfall $\psi = 0$ bzw. $\psi = \pi$ von J. MEIXNER[10]) angegeben worden.

[9]) Auf die Normierung von $me_\nu(t_0;h_0^2)$ kann wegen der Homogenität verzichtet werden.

[10]) MEIXNER, J.: Math. Nachr. **5**, 371—378 (1951).

5.2. Läßt man auch das erste System zu Polarkoordinaten ausarten,

$$c \to 0, \qquad 2h\,\mathfrak{Cof}\, z \to k R, \qquad t \to \varphi,$$
$$c\,\mathfrak{Cof}(z \pm i t) = R\, e^{\pm i\varphi},$$

so entsteht, wenn wir o. B. d. A.

$$\psi = 0$$

setzen, das Additionstheorem der Zylinderfunktionen in der Form

$$\mathfrak{Z}_\nu^{(j)}(k R_0)\, e^{i\nu\varphi_0} = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} J_s(k\varrho)\, \mathfrak{Z}_{\nu+s}^{(j)}(k R_0)\, e^{i(\nu+s)\varphi_0}. \tag{20}$$

5.3. Läßt man allein das erste System ausarten, so erhält man mit $\alpha = 0$

$$M_\nu^{(j)}(z_0; h_0)\, me_\nu(t_0; h_0^2) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} d_s^*\, \mathfrak{Z}_{\nu+s}^{(j)}(k R)\, e^{i(\nu+s)\varphi} \tag{21}$$

mit

$$d_s^* = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^{l+s} c_{2l}^\nu(h_0^2)\, J_{2l-s}(k\varrho)\, e^{i(2l-s)\psi}. \tag{22}$$

Dabei ist entsprechend Hilfssatz 1

$$\begin{cases} R\, e^{\pm i\varphi} = \varrho\, e^{\pm i\psi} + c_0\,\mathfrak{Cof}(z_0 \pm i t_0) \\ \qquad \mathfrak{Re}\, z_0 \pm \mathfrak{Im}\, t_0 > 0, \end{cases} \tag{23}$$

und der Gültigkeitsbereich ist

$$\begin{cases} |R|\, e^{-\mathfrak{Im}\,\varphi} > \max\left(|\varrho\, e^{i\psi} \pm c_0|\right) \\ |R|\, e^{\mathfrak{Im}\,\varphi} > \max\left(|\varrho\, e^{-i\psi} \pm c_0|\right). \end{cases} \tag{23}$$

Auch diese Formeln hat für $\psi = 0$ bzw. $\psi = \pi$ J. MEIXNER[11]) angegeben; sie sind dort durch Einsetzen in die Differentialgleichungen und Herleitung von Rekursionsformeln für die d_s^* bewiesen worden.

5.4. Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß in (21), (22) alle wichtigen Reihenentwicklungen der MATHIEUschen Funktionen enthalten sind.

Dazu hat schon J. MEIXNER[11]) bemerkt, daß für $\varrho = \psi = 0$, $t_0 = \varphi = 0$ bzw. $t_0 = \varphi = \frac{\pi}{2}$, eventuell noch nach Differentiation nach t_0, die Reihenentwicklungen der Funktionen $M_\nu^{(j)}(z; h)$ nach Zylinderfunktionen der Argumente $2h\,\mathfrak{Cof}\, z$ bzw. $2h\,\mathfrak{Sin}\, z$ und für $\mathfrak{Re}\, z \to +\infty$ Verallgemeinerungen von (12) entstehen.

Wir zeigen noch, daß aus unseren Formeln, in denen ψ variabel bleibt, auch die SIEGERschen Reihen nach Produkten von BESSEL- und Zylinderfunktionen als Sonderfall gewonnen werden können. Wir brauchen nur zu bemerken, daß

$$R\, e^{\pm i\varphi} = \varrho\, e^{\pm i\psi} + c\,\mathfrak{Cof}(z \pm i t)$$

[11]) MEIXNER, J.: Math. Nachr. **3**, 14—19 (1949).

— wir lassen den Index 0 fort — durch

$$k R = h e^{z}, \qquad \varphi = t, \qquad k \varrho = - h e^{-z}, \qquad \dot{\psi} = - t$$

erfüllt wird. Dann wird aus (21), (22):

$$M_{\nu}^{(j)}(z; h)\, me_{\nu}(t; h^2) = \sum_{l,s=-\infty}^{+\infty} (-1)^l c_{2l}^{\nu}(h^2)\, J_{2l-s}(h e^{-z})\, \mathfrak{Z}_{\nu+s}^{(j)}(h e^{z})\, e^{i(\nu+2s-2l)t},$$

und der Vergleich der FOURIER-Entwicklungen bezüglich t ergibt die SIEGERschen Reihen:

$$c_{2r}^{\nu}(h^2)\, M_{\nu}^{(j)}(z; h) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l c_{2l}^{\nu}(h^2)\, J_{l-r}(h e^{-z})\, \mathfrak{Z}_{\nu+l+r}^{(j)}(h e^{z}).$$

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 11. Oktober 1952.)

Skovgaard, H.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 448—452 (1953)

Note on the number of real zeros of the confluent hypergeometric function $F(a; c; x)$.

By
H. Skovgaard.

The confluent hypergeometric function $F(a; c; x)$ or, in the notation of Pochhammer-Barnes, ${}_1F_1(a; c; x)$ is for all complex values of x given by

$$F(a; c; x) = 1 + \frac{a}{c}\frac{x}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots. \tag{1}$$

The parameters a and c are arbitrary complex numbers; c, however, must be different from $0, -1, -2, \ldots$. If a takes one of these values the function is, apart from a constant factor, the Laguerre polynomial $L_{-a}^{c-1}(x)$. In the present note we shall be concerned only with real values of a, c and x.

The numbers of positive and negative zeros, respectively, of $F(a; c; x)$ are known for all possible real sets of parameters (a, c). In a treatise on the differential equation (2) Kienast [1] has, in 1921, solved this problem and given a detailed proof. His account, however, is very complicated, mainly because of the great multiplicity of the theorems stated. The proofs are certainly elementary but rather troublesome. His general method of attack is the use of a recurrence-formula for $F(a; c; x)$ with respect to a, by virtue of which the functions

$$F(a; c; x), \quad F(a+1; c; x), \ldots, \quad F(a+k; c; x)$$

form a Sturmian sequence for certain values of a, c and k.

In a recent note Tricomi [2] has collected the results due to Kienast in a clear diagram. It is the object of the present note to furnish new and simplified proofs, which immediately lead to this diagram. In addition to (1) we shall only apply Kummer's formula (6) and the differential equation for $F(a; c; x)$

$$x\,y'' + (c - x)\,y' - a\,y = 0. \tag{2}$$

1. In this section we shall establish some theorems concerning the number of positive zeros of a function

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + \cdots, \quad -\infty < x < \infty. \tag{3}$$

It is assumed that the sequence of coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$ consists of real numbers, which are not all zero. It is then evident that if there is no variation of sign in the sequence of coefficients, then $f(x)$ has no positive zeros (terms which vanish are to be discarded before counting the variations of sign). We shall now prove the following:

Theorem 1. *If in* (3) *the sequence of coefficients has only one variation of sign, then* $f(x)$ *has exactly one positive zero, and this is a simple zero.*

If the variation of sign occurs at a_{p-r}, a_p, where a_p may be assumed positive, then, by considering successively the derivatives of $f(x)$, we obtain easily the following graphic representation of the sign of $f(x)$ and its p first derivatives in the interval $0 < x < \infty$ (the functions are positive at points of the full line and negative at points of the dotted line):

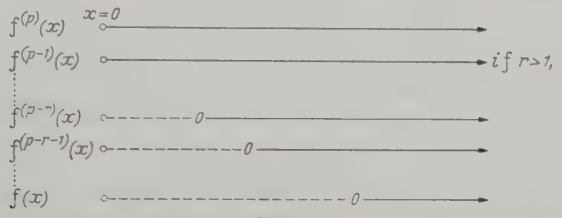

Fig. 1.

Next we state two closely related theorems:

Theorem 2. *If the sequence of coefficients in* (3) *has a total of* $n \geqq 2$ *variations of sign, of which the last one occurs at* a_{p-r}, a_p, *and if* $f^{(\nu-1)}(x)\, f^{(\nu+1)}(x) < 0$ *for* $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$ *and for such* $x > 0$ *for which* $f^{(\nu)}(x) = 0$, *then* $f(x)$ *has exactly* n *positive zeros, each of which is a simple zero.*

Theorem 3. *If the sequence of coefficients in* (3) *has a total of* $n \geqq 2$ *variations of sign, of which the last one occurs at* a_{p-r}, a_p, *and if* $f^{(\nu-1)}(x)\, f^{(\nu+1)}(x) > 0$ *for* $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$ *and for such* $x > 0$ *for which* $f^{(\nu)}(x) = 0$, *then* $f(x)$ *has no positive zeros if* n *is even, and exactly one positive, simple zero if* n *is odd.*

The condition in theorem 3 can be weakened slightly (see page 452, the discussion of the case B 4).

In order to prove theorem 2 we consider the functions

$$f(x), \quad f'(x), \ldots, \quad f^{(p)}(x). \tag{4}$$

Assuming first that none of the numbers

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \ldots, \quad f^{(p-1)}(0) = (p-1)!\, a_{p-1} \tag{5}$$

are zero, then (4) is a Sturmian sequence in the interval $0 \leqq x \leqq K$, if K is chosen such that all the functions in (4) for $x \geqq K$ have the same sign as a_p. This follows from the fact that the functions satisfy the following four conditions:

1°. They are continuous for all x, and different from zero for $x = 0$ and $x = K$.

2°. $f^{(p)}(x) \neq 0$ in the interval $0 \leqq x < \infty$.

3°. $f^{(\nu-1)}(x)\, f^{(\nu+1)}(x) < 0$ for $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, and for such $x \geqq 0$, for which $f^{(\nu)}(x)$ happens to be equal to zero.

4°. $[f'(x)]^2 > 0$ for such $x \geqq 0$, for which $f(x)$ happens to be equal to zero. (This follows indirectly from 3° using $\nu = 1$).

Sturm's theorem then states that $W(x)$, the number of variations of sign in the sequence (4), changes its value only if x passes a zero of $f(x)$,

and at such a point $W(x)$ decreases by one. Hence it follows that $f(x)$ has $W(0)-W(K)=n$ zeros in the interval $0<x<K$. According to 4° all the zeros are simple, and hence the theorem is proved in this special case, because $f(x)$ has constant sign for $x \geq K$.

If on the other hand one or more of the numbers (5) are equal to zero, then we choose an $\varepsilon > 0$ such that none of the functions in (4) have any zeros in the interval $0 < x \leq \varepsilon$ (this can be done because the functions are analytic and hence they have a finite number of zeros in any finite interval). Now the fact that each term in the sequence (4) is the derivative of the preceding term combined with the fact that $f^{(p)}(0) \neq 0$ implies that $W(0) = W(\varepsilon)$. Hence the theorem is true because (4) is a Sturmian sequence in the interval $\varepsilon \leq x \leq K$.

Theorem 3 is proved in a somewhat similar way. A slight modification in the proof occurs because the inequality sign in 3° is changed, and hence $W(x)$ decreases by 2, if x passes increasingly a positive zero of $f^{(\nu)}(x)$, $1 \leq \nu \leq p-1$. If now $a_\nu = \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!}$, $\nu \neq 0$, and a_p have opposite sign, then $f^{(\nu)}(x)$ has at least one positive zero, because it is continuous. There are at least $\frac{n}{2}$ or $\frac{n-1}{2}$ such a_ν according as n is even or odd. Thus, at the zeros of $f^{(\nu)}(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, in the interval $0 \leq x \leq K$ there is a total decrease in $W(x)$ of at least n or $n-1$ according as n is even or odd. On the other hand, from the assumptions it follows that $W(x)$ decreases by n, and hence "at least" can be replaced by "exactly", and therefore $f(x)$ has no positive zero or one positive zero according as n is even or odd.

2. We shall now consider the confluent function (1). First we notice that $x=0$ *is not a zero for any values of* a *and* c, because

$$F(a;c;0) = 1.$$

Next, it is sufficient to determine the number of positive zeros, because it follows from KUMMER'S *formula*

$$F(a;c;x) = e^x F(c-a;c;-x) \tag{6}$$

that *the number of negative zeros of* $F(a;c;x)$ *is equal to the number of positive zeros of* $F(c-a;c;x)$. This is illustrated geometrically in Fig. 2, where the line $c=2a$ is the axis of oblique symmetry.

Denoting by n a positive integer, we have, for the series (1), the following possibilities (cf. Fig. 3):

A. There is no variation of sign in the sequence of coefficients in each of the following cases:

1. $a > 0, \quad c > 0.$
2. $-n < a < -n+1, \quad -n < c < -n+1.$
3. $a = 0.$
4. $a = -1, -2, \ldots, \quad c < a+1.$

Thus, $F(a;c;x)$ *has no positive zeros in these cases.*

B. There are n variations of sign in the sequence of coefficients in each of the following cases:

1. $-n \leqq a < -n+1, \quad c > 0.$
2. $-(n+m) \leqq a < -(n+m)+1, \quad -m < c < -m+1$, m a positive integer.
3. $a > 0, \quad -n < c < -n+1.$
4. $-m < a < -m+1, \quad -(n+m) < c < -(n+m)+1$, m a positive integer.

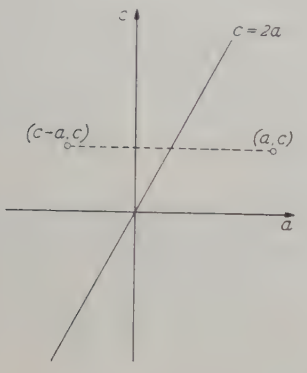

Fig. 2.

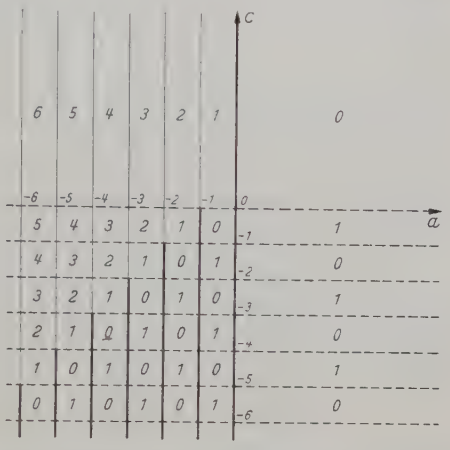

Fig. 3.

Fig. 2. The number of negative zeros of $F(a; c; x)$ = the number of positive zeros of $F(c-a; c; x)$.

Fig. 3. The number of positive zeros of $F(a; c; x)$. On the lines – – – – the function is not defined. On the lines ——— the function has no positive zeros. On the lines ——— the function has the same number of positive zeros as in the adjacent region on the right.

In order to determine the number of positive zeros in each of these cases we shall first consider (2), from which we obtain

$$(7) \quad x F^{(\nu+1)} + (\nu - 1 + c - x) F^{(\nu)} + (1 - a - \nu) F^{(\nu-1)} = 0, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

where F denotes $F(a; c; x)$. From this it follows that for every $x > 0$, for which $F^{(\nu)} = 0$, the following two inequalities hold:

$$(8) \qquad F^{(\nu-1)} F^{(\nu+1)} < 0, \quad \text{if} \quad \nu < 1 - a,$$

$$(9) \qquad F^{(\nu-1)} F^{(\nu+1)} > 0, \quad \text{if} \quad \nu > 1 - a,$$

except in the cases, where $F^{(\nu-1)} \equiv 0$; according to (1) this happens only, if a is a non-positive integer greater than $-(\nu-1)$, that is $1 - a < \nu$. These exceptional cases will be of no significance in the following, because in the cases B 1 and B 2 only (8) is used, and in the cases B 3 and B 4 a is either positive or not an integer.

Let us now consider the two cases B 1 and B 2. Using the same notation as in (3), it is seen that the last variation of sign in the sequence of coefficients of (1) occur at a_{p-1}, a_p, where $p = -[a]$. Thus (8) is true for each of the numbers $\nu = 1, 2, \ldots, p-1$, and hence we can apply the theorems 1 and 2.

This proves that, *in the cases B 1 and B 2 $F(a;c;x)$ has exactly n positive zeros, all of which are simple ones.*

Finally we shall prove that, *in the cases B 3 and B 4 $F(a;c;x)$ has no positive zeros if n is even, but one positive, simple zero if n is odd.*

In the case B 3 we have $a > 0$; hence (9) holds for every positive ν, and the statement follows from the theorems 1 and 3.

In the case B 4, if $n = 1$ we use again theorem 1. If $n \geqq 2$ we notice that the first variation of sign in the sequence of coefficients occurs at a_q, a_{q+1}, where $q = -[a]$. Since (9) holds for every $\nu \geqq 1 - [a] = q + 1$ and (8) holds for $\nu = 1, 2, \ldots, q$, there is a decrease in $W(x)$ of 2 or 0 if x passes a positive zero of $F^{(\nu)}$ according as $\nu \geqq q+1$ or $1 \leqq \nu \leqq q$. Hence, from the reasoning used in proving theorem 3, the statement in theorem 3 about the zeros of $f(x)$ holds. [It is easy to prove that we might avoid the use of (8), because the statement in theorem 3 is true if only $f^{(\nu-1)}(x) f^{(\nu+1)}(x) > 0$ for $\nu \geqq q+s$, where a_q, a_{q+s} denotes the first variation of sign].

Thus we have completed the discussion of the number of real zeros of $F(a;c;x)$. Fig. 3 gives a diagram of the number of positive zeros. This diagram is essentially the same as that given by Tricomi.

We might add, as a trivial consequence, that from the formula

$$F^{(\nu)}(a;c;x) = \frac{a(a+1)\ldots(a+\nu-1)}{c(c+1)\ldots(c+\nu-1)} F(a+\nu;c+\nu;x)$$

we can immediately tell the number of positive and negative zeros of the derivatives of $F(a;c;x)$.

References.

[1] Kienast, A.: Untersuchungen über die Lösungen der Differentialgleichung $x\,y'' + (\gamma - x)\,y' - \beta\,y = 0$. Denkschr. schweiz. naturforsch. Ges. **57**, 247—325 (1921). — [2] Tricomi, F. G.: Über die Abzählung der Nullstellen der konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Math. Z. **52**, 669—675 (1950).

København (Dänemark), Lab. f. anv. Matematik, Sølvgade 83.

(Eingegangen am 19. Januar 1953.)

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 453—455 (1953)

Zur Frage der Indexverschiebung beim Borel-Verfahren.

Von
DIETER GAIER.

Vorgelegt sei die Reihe $\sum a_n$[1]) mit beliebigen komplexen Gliedern und mit den Teilsummen s_n. Sie heißt B-summierbar [bzw. B'-summierbar] zum Wert s, wenn

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sum \frac{s_n x^n}{n!} = s \quad \left[\text{bzw. } \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}a(t)\,dt = s \quad \text{mit} \quad a(t) = \sum \frac{a_n t^n}{n!}\right]$$

ist, und wir schreiben dann $B-\sum a_n = s$ [bzw. $B'-\sum a_n = s$].

Beim Problem der Indexverschiebung beim B-Verfahren bildet man zu der Reihe $\sum a_n$ die neue Reihe $\sum b_n$, wobei $b_n = a_{n-1}\,(n \geqq 1)$ und $b_0 = 0$ ist, und legt sich die Frage vor, unter welchen Bedingungen die folgende Aussage gilt:

(1) $$\text{Aus } B-\sum b_n = s \quad \text{folgt} \quad B-\sum a_n = s.$$

GARTEN hatte gezeigt, daß (1) sicher dann richtig ist, falls die a_n der Größenbeschränkung $a_n = O(n^k)$ $(n\to\infty,\ k \text{ fest})$ genügen[2]). Diese Größenbeschränkung für die a_n konnte KARAMATA auf $a_n = O(e^{n\varrho})$ $(n\to\infty,\ \varrho < \frac{1}{3})$ abschwächen[3]). In beiden Fällen hat das der Reihe $\sum a_n$ zugeordnete Funktionselement $\sum a_n z^n$ einen Konvergenzradius $r \geqq 1$. Darüber hinaus werden wir hier zeigen:

Die Aussage (1) *ist sicher richtig, wenn* $a_n = O(K^n)$ $(n\to\infty,\ K \text{ fest})$ *ist, wenn also das Funktionselement* $\sum a_n z^n$ *einen positiven Konvergenzradius hat.*

Beim Beweis werden vor allem Hilfsmittel aus der Theorie der ganzen Funktionen verwendet.

Wir geben (1) zunächst eine etwas andere Fassung. Die Aussage $B-\sum b_n = s$ ist nämlich äquivalent zu $B'-\sum a_n = s$, und aus $B'-\sum a_n = s$ folgt $B-\sum a_n = s$ genau dann, wenn $e^{-t}a(t)\to 0$ strebt für $t\to\infty$[4]). Schließlich kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $s = 0$ angenommen werden. Zu der Aussage (1) ist also äquivalent:

(1′) $$\text{Aus } B'-\sum a_n = 0 \quad \text{folgt} \quad e^{-t}a(t)\to 0 \quad (t\to\infty),$$

und wir haben zu zeigen, daß (1′) richtig ist, falls $a_n = O(K^n)$ $(n\to\infty,\ K \text{ fest})$ ist. Vorbereitend beweisen wir den folgenden

[1]) Für $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ schreiben wir stets $\sum a_n$.
[2]) Vgl. V. GARTEN [2].
[3]) Vgl. J. KARAMATA [4].
[4]) Vgl. z.B. G. H. HARDY [3], S. 183.

Hilfssatz. *Die Funktion $f(z)$ sei in $\Re(z) \geq 0$ regulär und es sei dort $|f(z)| \leq A e^{a|z|}$ für positive Konstanten A, a; ferner sei $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $(z = x + i y)$. Dann gibt es zu jedem $a' > a$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein x_0, so daß*

$$|f(x + i y)| \leq \varepsilon e^{a'|y|}$$

ist für $x \geq x_0$[5]).

Beweis. Die in $\Re(z) \geq 0$ reguläre Hilfsfunktion $h(z) = e^{i a' z} f(z)$ hat folgende Eigenschaften:

a) Für $x \to \infty$ strebt $|h(x)| = |f(x)| \to 0$;

b) für $y \geq 0$ ist $|h(i y)| \leq e^{-a' y} \cdot A e^{a y}$, also strebt $h(i y) \to 0$ für $y \to \infty$;

c) im ersten Quadranten $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ ist $|h(z)| \leq A e^{(a+a')|z|}$.

Nach dem Prinzip von PHRAGMÉN und LINDELÖF[6]) ist daher $h(z)$ im ersten Quadranten beschränkt, und wegen a) und b) gilt sogar schärfer $|h(z)| \leq \varepsilon$ in dem Teil des ersten Quadranten, in dem $|z| \geq R_0(\varepsilon)$ ist[7]). Also gilt für $x \geq R_0$ und $y \geq 0$

$$|h(z)| = e^{-a' y} |f(x + i y)| \leq \varepsilon.$$

Entsprechend schließt man, wenn z im vierten Quadranten liegt, indem man die Hilfsfunktion $e^{-i a' z} f(z)$ heranzieht.

Der Hilfssatz gestattet uns, folgenden Satz zu beweisen, der auch unabhängig von der hier behandelten Fragestellung interessant ist.

Satz 1. *Die Funktion $f(z)$ sei in $\Re(z) \geq 0$ regulär und es sei dort $|f(z)| \leq A e^{a|z|}$ für positive Konstanten A, a; ferner sei $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ $(z = x + i y)$. Dann ist auch $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.*

Beweis. Wir setzen im vorigen Hilfssatz $a' = a + 1$ und wählen ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann ist $|f(x + i y)| \leq \varepsilon e^{(a+1)|y|}$ für $x \geq x_0$ und daher für $x \geq x_0 + \frac{1}{a+1}$

$$|f'(x)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{C}} \frac{f(z)\, dz}{(z - x)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon e^{(a+1)d}}{d^2} \cdot 2\pi d = (a + 1) e \cdot \varepsilon,$$

wenn $\mathfrak{C}$ den Kreis $|z - x| = d = \frac{1}{a+1}$ bezeichnet. Das heißt aber, daß $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$ ist.

Wir kommen nun auf die Fragestellung (1′) unserer Arbeit zurück.

Satz 2. *Aus $F(x) = \int_0^x e^{-t} a(t)\, dt \to 0$ $(x \to \infty)$ mit $a(t) = \sum \frac{a_n t^n}{n!}$ folgt $e^{-z} a(x) \to 0$ $(x \to \infty)$, falls $a_n = O(K^n)$ $(n \to \infty,\ K$ fest$)$ ist.*

Beweis. Es sei etwa $|a_n| \leq C_1 K^n$ für $n \geq 0$. Dann ist für $\Re(z) \geq 0$

$$|e^{-z} a(z)| \leq 1 \cdot \sum \frac{|a_n| |z|^n}{n!} \leq C_1 e^{K|z|},$$

---

[5]) Ein dazu verwandtes Resultat findet sich bei S. AGMON [1], S. 494—495.

[6]) Vgl. z. B. E. C. TITCHMARSH [5], S. 177.

[7]) Vgl. z. B. E. C. TITCHMARSH [5], S. 179.

also ist in $\Re(z) \geqq 0$

$$|F(z)| \leqq C_1 e^{K|z|} \cdot |z| \leqq C_2 e^{(K+1)|z|}.$$

Ferner ist nach Voraussetzung $\lim_{x \to \infty} F(x) = 0$. Satz 1 besagt dann, daß auch $\lim_{x \to \infty} F'(x) = 0$ ist, d.h. es ist $\lim_{x \to \infty} e^{-x} a(x) = 0$, und dies war zu zeigen.

Aus dem eingangs Gesagten und dem $B \to B'$-Satz geht, wie wir abschließend noch bemerken wollen, auch hervor, daß Satz 2 so gefaßt werden kann:

Für Reihen $\sum a_n$, deren zugeordnetes Funktionselement $\sum a_n z^n$ einen positiven Konvergenzradius hat, sind die Verfahren B und B' äquivalent.

Literatur.

[1] Agmon, S.: Functions of exponential type in an angle and singularities of Taylor series. Trans. Amer. Math. Soc. **70**, 492—508 (1951). — [2] Garten, V.: Über den Einfluß endlich vieler Änderungen auf das Borelsche Limitierungsverfahren. Math. Z. **40**, 756—759 (1936). — [3] Hardy, G. H.: Divergent series. Oxford 1949. — [4] Karamata, J. Über die Indexverschiebung beim Borelschen Limitierungsverfahren. Math. Z. **45**, 635—641 (1939). — [5] Titchmarsh, E. C.: The theory of functions. Oxford 1950.

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule, Keplerstr. 10.

(Eingegangen am 10. April 1953.)

Gaier, D.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 456—458 (1953)

Schlichte Potenzreihen an der Konvergenzgrenze.

Von

Dieter Gaier.

Das Funktionselement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

sei in $|z| < 1$ regulär und schlicht. Die Herren Erdös, Herzog und Piranian haben vor einiger Zeit durch Angabe eines Beispiels bewiesen, daß es Potenzreihen der Form (1) gibt, die auf $|z| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren[1]). Daraufhin wurde vom Verfasser gezeigt, wie man die Existenz solcher Potenzreihen ohne Rechnung nachweisen kann, wenn man bekannte Ergebnisse aus der Theorie der konformen Abbildung heranzieht[2]).

Inzwischen haben nun die Herren Herzog und Piranian bemerkt, daß (1) möglicherweise auf $|z| = 1$ überall konvergiert, wobei jedoch die Konvergenz auf jedem noch so kleinen Teilbogen von $|z| = 1$ ungleichmäßig ist; $f(z)$ kann dabei in $|z| < 1$ beschränkt sein[3]). Es soll im folgenden gezeigt werden, wie die vom Verfasser im oben genannten Fall verwandte Methode der konformen Abbildung auch zur Erzeugung solcher Potenzreihen geeignet ist. Dabei stützen wir uns vor allem auf Untersuchungen von Carathéodory über die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung schlichter, einfach zusammenhängender Gebiete[4]). Wir beweisen also den folgenden

Satz. *Es gibt eine in* $|z| < 1$ *reguläre, beschränkte und schlichte Funktion* $f(z)$, *deren Potenzreihenentwicklung* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *auf* $|z| = 1$ *überall konvergiert, aber auf keinem Teilbogen von* $|z| = 1$ *gleichmäßig.*

[1]) Vgl. P. Erdös, F. Herzog und G. Piranian [2].

[2]) Vgl. D. Gaier [3]. Es sei noch hinzugefügt, daß *für jede auf* $|z| = 1$ *gleichmäßig konvergente Potenzreihe der Form* (1) *die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{1+\varepsilon}$ *konvergiert* (ε *beliebig* > 0). Denn für solche Potenzreihen ist $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty$, woraus die Behauptung sofort mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung folgt. Ähnlich zeigt man, daß die (mögliche) Divergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ einer Einschränkung unterworfen ist: *Für jede auf* $|z| = 1$ *gleichmäßig konvergente Potenzreihe der Form* (1) *ist* $\sum_{n=0}^{m} |a_n| = o\left(\sqrt{\log m}\right)$.

[3]) Vgl. F. Herzog und G. Piranian [4] und [4a] S. 51.

[4]) Vgl. C. Carathéodory [1].

Beweis. a) Anschließend an CARATHÉODORY[5]) konstruieren wir uns zunächst in der w-Ebene ($w = u + i\,v$) ein einfach zusammenhängendes, beschränktes und schlichtes Gebiet $\mathfrak{G}_w$, das den Wertevorrat unserer gesuchten Funktion $f(z)$ für $|z| < 1$ darstellen wird.

Es bezeichne $0; 1 + i; 2$ den Polygonzug P_0. Aus P_n entstehe der Polygonzug P_{n+1} dadurch, daß man das mittlere Drittel a jeder Seite von P_n lösche und dafür zwei Strecken einfüge, die die beiden Endpunkte von a mit der Mitte der Projektion von a auf CD verbinden ($n = 0, 1, \ldots$). (Fig. 1 zeigt

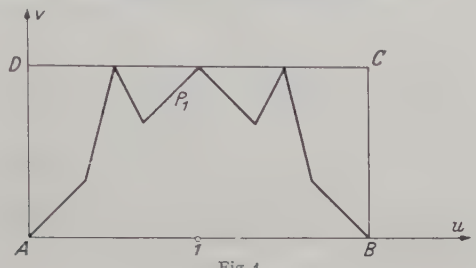

Fig. 1.

den Polygonzug P_1.) Spiegelt man P_n an AB, so entstehe $\overline{P}_n$ und durch P_n und $\overline{P}_n$ werde das Gebiet $\mathfrak{G}_n$ begrenzt. Schließlich setze man $\mathfrak{G}_w = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{G}_n$.

CARATHÉODORY hat nun gezeigt, daß der Rand des Gebiets $\mathfrak{G}_w$ aus Mengen N_1 und N_2 von Primenden erster und zweiter Art besteht[6]), wobei N_1 und N_2 in jedem Primendenintervall die Mächtigkeit des Kontinuums besitzen und also insbesondere in jedem Primendenintervall dicht liegen. N_2 ist dabei die Menge sämtlicher abgeschlossenen Geradenstücke, die zum Rand von $\mathfrak{G}_w$ gehören und parallel zur v-Achse sind, während N_1 aus den restlichen Randpunkten von $\mathfrak{G}_w$ besteht, die alle auf $v = +1$ oder $v = -1$ liegen. Jedes Primende E trägt einen erreichbaren Randpunkt, der im Falle $E \in N_1$ auf $v = +1$ oder $v = -1$ liegt, aber im Falle $E \in N_2$ zu $|v| < 1$ gehört.

b) Wird das Gebiet $\mathfrak{G}_w$ durch die reguläre Funktion $z = \Phi(w)$ auf $|z| < 1$ abgebildet, so ist die Umkehrfunktion $w = f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, beschränkt und schlicht, und die Primenden von $\mathfrak{G}_w$ werden umkehrbar eindeutig den Punkten der Kreislinie $|z| = 1$ zugeordnet[7]). Letzteres hat zur Folge, daß jeder von einem erreichbaren Randpunkt von $\mathfrak{G}_w$ ausgehende Einschnitt γ bei der Abbildung durch $z = \Phi(w)$ in ein Jordansches Kurvenstück C übergeht, das in einem bestimmten Punkt von $|z| = 1$ endigt.

Nun existiert $\lim_{r \to 1} f(r\,e^{i\varphi})$ für alle φ des Intervalls $\langle 0, 2\pi)$. Denn ist E_φ das dem Punkt $e^{i\varphi}$ entsprechende Primende und bezeichnet w_φ den auf ihm gelegenen erreichbaren Randpunkt von $\mathfrak{G}_w$, so wähle man einen von w_φ ausgehenden

[5]) Vgl. C. CARATHÉODORY [1], S. 366.

[6]) Bezüglich der benützten Begriffe vgl. C. CARATHÉODORY [1] oder B. v. KERÉKJÁRTÓ [5], S. 108—120.

[7]) Vgl. C. CARATHÉODORY [1], S. 350.

Einschnitt γ_φ. Dessen Bild in der z-Ebene ist ein gegen $e^{i\varphi}$ strebendes Jordansches Kurvenstück C_φ. Es ist also $\lim f(z) = w_\varphi$ für $z \to e^{i\varphi}$ längs C_φ. Daraus folgt nach einem bekannten Satz aus der Theorie der beschränkten Funktionen[8]), daß $\lim_{r\to 1} f(r\,e^{i\varphi}) = w_\varphi$ ist[9]).

Dies hat aber zur Folge, daß die Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ von $f(z)$ für $z = e^{i\varphi}$ zum Wert w_φ konvergiert[10]), wodurch eine Funktion $f(e^{i\varphi})$ für $0 \leqq \varphi < 2\pi$ erklärt ist. Dieselbe ist aber in keinem φ-Intervall stetig. Denn $\Im(w_\varphi)$ ist einerseits auf einer in $\langle 0,2\pi)$ dichten Menge gleich $+1$ oder -1, nämlich genau dann, wenn $e^{i\varphi}$ einem Primende erster Art entspricht; andererseits ist $\Im(w_\varphi)$ auf einer in $\langle 0,2\pi)$ dichten Menge von $+1$ und -1 verschieden, nämlich genau dann, wenn $e^{i\varphi}$ einem Primende zweiter Art entspricht. Da die Randfunktion $f(e^{i\varphi})$ also in keinem φ-Intervall stetig ist, kann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\varphi n}$ in keinem φ-Intervall gleichmäßig konvergieren, d.h. $f(z)$ hat sämtliche gewünschten Eigenschaften.

Literatur.

[1] CARATHÉODORY, C.: Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. **73**, 323—370 (1913). — [2] ERDÖS, P., F. HERZOG and G. PIRANIAN: Schlicht Taylor series whose convergence on the unit circle is uniform but not absolute. Pacific J. Math. **1**, 75—82 (1951). — [3] GAIER, D.: Schlichte Potenzreihen, die auf $|z| = 1$ gleichmäßig, aber nicht absolut konvergieren. Math. Z. **57**, 349—350 (1953). — [4] HERZOG, F., and G. PIRANIAN: Sets of convergence of Taylor series. II. Bull. Amer. Math. Soc. **58**, 639 (1952). — [4a] HERZOG, F., and G. PIRANIAN: Sets of convergence of Taylor series. II. Duke math. J. **20**, 41—54 (1953). — [5] KERÉKJÁRTÓ, B. v.: Vorlesungen über Topologie I. Berlin 1923. — [6] LANDAU, E.: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, 2. Aufl. Berlin 1929. — [7] NEVANLINNA, R.: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1936.

[8]) Vgl. z.B. R. NEVANLINNA [7], S. 65.

[9]) Allgemein kann so gezeigt werden: *Ist $f(z)$ in $|z| < 1$ regulär, beschränkt und schlicht, und besitzt das Bildgebiet $\mathfrak{B}_w$ von $|z| < 1$ nur Primenden erster und zweiter Art (also Primenden mit erreichbaren Randpunkten), so ist $f(z)$ stetig bei radialer Annäherung an $|z| = 1$.*

[10]) Vgl. z.B. E. LANDAU [6], S. 65—66.

Stuttgart, Mathematisches Institut A der Technischen Hochschule, Keplerstr. 10.

(Eingegangen am 16. März 1953.)

KNESER, M.
Math. Zeitschr. Bd. 58, S. 459—484 (1953)

Abschätzung der asymptotischen Dichte von Summenmengen *).

Von
MARTIN KNESER.

Einleitung.

In der additiven Zahlentheorie spielen zwei Begriffe eine große Rolle. Erstens der Begriff der Summe von Zahlenmengen: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen ganzer rationaler Zahlen, so versteht man unter der Summe $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Menge aller Zahlen $a-b$ mit $a\in\mathfrak{A}$ und $b\in\mathfrak{B}$. Zweitens der Begriff der Dichte einer Zahlenmenge $\mathfrak{A}$: Es sei $A(x)$ die Anzahl der positiven Zahlen $a\leqq x$ aus $\mathfrak{A}$; dann nennt man den Wert $\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A(x)}{x}$ die untere finite (auch SCHNIRELMANNsche) Dichte von $\mathfrak{A}$ und $\lim_{x\to\infty}\frac{A(x)}{x}$ die untere asymptotische Dichte von $\mathfrak{A}$. Die SCHNIRELMANNsche Dichte der Summe zweier Mengen läßt sich nach einem bekannten Satz, den man etwa als zweite unter den „Drei Perlen der Zahlentheorie" von CHINTSCHIN [*1*] findet und den ich der Kürze halber den Dichtesatz nennen will, nach unten abschätzen. Dieser Satz lautet folgendermaßen.

Dichtesatz. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen ganzer rationaler Zahlen*[1]*, die die Null enthalten, $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ ihre Summe und $A(x)\,(B(x), C(x))$ die Anzahl der zu $\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ gehörigen positiven Zahlen $\leqq x$, so gilt die Ungleichung*

$$\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{C(x)}{x}\geqq\operatorname{Min}\left(1,\ \underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A(x)+B(x)}{x}\right). \tag{1}$$

Dieser Satz wurde 1930 von LANDAU und SCHNIRELMANN in der schwächeren Form

$$\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{C(x)}{x}\geqq\operatorname{Min}\left(1,\ \underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A(x)}{x}+\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{B(x)}{x}\right)$$

*) Als Habilitationsschrift von der Naturwissenschaftlich-Mathematischen Fakultät der Ruprecht-Karl-Universität Heidelberg angenommen.

[1]) Üblicherweise wird der Satz nur für Mengen nichtnegativer Zahlen ausgesprochen. Für unsere Zwecke ist es aber vorteilhafter, ihn in der allgemeineren Gestalt zur Verfügung zu haben. Sachlich ist das kein großer Unterschied; denn wenn der Satz einmal für Mengen nichtnegativer Zahlen bewiesen ist, so folgt er auch für beliebige Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$: Man nenne $\mathfrak{A}^+$ bzw. $\mathfrak{B}^+$ die Menge der nichtnegativen Zahlen aus $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ und ihre Summe $\mathfrak{C}^+$; dann ist $A^+(x)=A(x)$, $B^+(x)=B(x)$ und $\mathfrak{C}^+\subseteq\mathfrak{C}$, also

$$\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{C(x)}{x}\geqq\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{C^+(x)}{x}\geqq\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A^+(x)+B^+(x)}{x}=\underset{x=1,2,\dots}{\operatorname{fin}}\frac{A(x)+B(x)}{x}.$$

vermutet und 1942 von H. B. MANN [7] bewiesen. Seitdem wurden mehrere Beweise und Verallgemeinerungen gegeben (vgl. [3], [5] und die in [3] angegebene Literatur). Andere Autoren versuchten ein ähnliches Ergebnis für den Fall zu erhalten, daß man die untere Grenze durch den unteren Limes, also die finite Dichte durch die asymptotische ersetzt. Dabei darf man kein ebenso glattes Resultat erwarten, da das genaue Analogon zu (1), die Ungleichung

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{C(x)}{x} \geq \operatorname{Min}\left(1, \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{A(x)+B(x)}{x}\right), \tag{2}$$

und auch die der zweiten schwächeren Ungleichung entsprechende nicht allgemein richtig ist, wie man an den folgenden Beispielen sieht.

Es seien g, k und l beliebige natürliche Zahlen und $k+l \leqq g$; $\mathfrak{A}^{(g)}$ bzw. $\mathfrak{B}^{(g)}$ bestehe aus allen Zahlen, die einer der Zahlen $0, 1, \ldots, k-1$ bzw. $0, 1, \ldots, l-1$ modulo g kongruent sind. Dann besteht die Summe $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} + \mathfrak{B}^{(g)}$ aus den Restklassen $0, 1, \ldots, k+l-2$ modulo g und es ist daher

$$\lim_{x\to\infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x} = \frac{k+l-1}{g} < \frac{k+l}{g} = \operatorname{Min}\left(1, \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x}\right)$$

im Gegensatz zu (2). An die Stelle der Restklassen $0, 1, \ldots, k-1$ bzw. $0, 1, \ldots, l-1$ modulo g können dabei auch andere k bzw. l Restklassen treten, wenn nur ihre Summe aus genau $k+l-1$ Restklassen besteht.

Weitere Beispiele von Mengen, für die (2) nicht gilt, erhält man, wenn man aus $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ Teilmengen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ wegläßt, die nicht zu groß sind, so daß die rechte Seite der letzten Ungleichung nicht zu sehr verkleinert wird. Genauer: Es seien $\overline{\mathfrak{A}} \subseteqq \mathfrak{A}^{(g)}$ und $\overline{\mathfrak{B}} \subseteqq \mathfrak{B}^{(g)}$ so beschaffen, daß

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\bar{A}(x)+\bar{B}(x)}{x} < \frac{1}{g} \tag{3}$$

ist. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Komplementärmengen von $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ in $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$, so gilt für ihre Summen $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ersichtlich $\mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{C}^{(g)}$, also

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{C(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} - \frac{1}{g} <$$

$$< \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} - \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\bar{A}(x)+\bar{B}(x)}{x} = \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{A(x)+B(x)}{x},$$

und das steht wegen

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{A(x)+B(x)}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} = \frac{k+l}{g} \leq 1$$

im Gegensatz zu (2).

Als Gegenstück zu der Relation $\mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{C}^{(g)}$ läßt sich leicht nachweisen, daß alle genügend großen Zahlen aus $\mathfrak{C}^{(g)}$ auch in $\mathfrak{C}$ liegen. Aus jeder Darstellung

$c = a^{(g)} + b^{(g)}$ einer Zahl aus $\mathfrak{C}^{(g)}$ als Summe zweier Zahlen aus $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ erhält man nämlich eine andere $c = a + b$, wenn man $a = a^{(g)} \bmod g$ beliebig zwischen 0 und c wählt und $b = c - a$ setzt. Die Anzahl dieser Darstellungen ist für $c \to \infty$ asymptotisch gleich c/g; wegen (3) gibt es unter den Paaren (a, b) für genügend großes c sicher einige mit $a \in \mathfrak{A}$ und $b \in \mathfrak{B}$, so daß c auch in $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ liegt.

Im folgenden werde ich einen Satz beweisen, der im wesentlichen aussagt, daß die Eigenschaften der hier konstruierten Beispiele kennzeichnend sind für die Mengen, die der Ungleichung (2) nicht genügen. Mit den schon oben benutzten Bezeichnungen lautet er folgendermaßen.

Dichtesatz für die asymptotische Dichte. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Mengen ganzer rationaler Zahlen mit der Summe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, so gilt entweder die Ungleichung*

$$\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{C(x)}{x} \geqq \underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x) + B(x)}{x} \tag{4}$$

oder es gibt eine natürliche Zahl g und zwei Mengen $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$, welche die Mengen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ enthalten und aus vollen Restklassen modulo g bestehen derart, daß alle genügend großen Zahlen aus der Summe $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} + \mathfrak{B}^{(g)}$ schon in $\mathfrak{C}$ liegen und die Formel gilt

$$\lim_{x \to \infty} \frac{C^{(g)}(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{A^{(g)}(x) + B^{(g)}(x)}{x} - \frac{1}{g}. \tag{5}$$

Dabei braucht in der Ungleichung (4) die rechte Seite nicht wie in (1) und (2) durch 1 ersetzt zu werden, falls $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x) + B(x)}{x} > 1$ ist. Vielmehr liegt dann — da $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{C(x)}{x}$ als Dichte höchstens 1 ist, die Ungleichung (4) also sicher nicht zutrifft — stets die zweite Möglichkeit vor. Das kann man auch direkt einsehen: Man setze $g = 1$, $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ gleich der Menge $\mathfrak{Z}$ aller Zahlen; dann ist auch $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} + \mathfrak{B}^{(g)} = \mathfrak{Z}$ und die Gl. (5) trifft zu; wegen $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x) + B(x)}{x} > 1$ gilt für die Komplementärmengen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Ungleichung (3), und daher enthält $\mathfrak{C}$ — nach dem gleichen Schluß wie oben — alle genügend großen Zahlen aus $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{Z}$ wie behauptet. Außerdem folgt noch $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{C(x)}{x} = 1$ und damit die Ungleichung (2). Die Beispiele von Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, für die (2) nicht gilt, sind also unter denen zu suchen, die die Eigenschaft $\underline{\lim_{x \to \infty}} \frac{A(x) + B(x)}{x} \leqq 1$ haben. Aus unserem Satz folgt nun leicht, daß diese Beispiele genau die zu Anfang konstruierten sind. Ist nämlich (2) und daher auch (4) falsch, so haben die Mengen $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ des Satzes gerade die Eigenschaften, die bei den Beispielen verlangt waren: Sie bestehen aus (k bzw. l) vollen Restklassen modulo g und ihre Summe $\mathfrak{C}^{(g)}$ enthält $k + l - 1$ Restklassen — das folgt aus (5) — und es ist $k + l \leqq g$, denn aus dem Satz folgt $C(x) = C^{(g)}(x) + O(1)$ (für $x \to \infty$) also, wenn man noch das Gegenteil

von (4): $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} < \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x}$ berücksichtigt

$$\frac{k+l}{g} = \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{C^{(g)}(x)}{x} + \frac{1}{g}$$
$$= \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} + \frac{1}{g} < \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x} + \frac{1}{g} \leqq 1 + \frac{1}{g},$$

d.h. $k+l<g+1$ wie behauptet. Für die Komplementärmengen $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}^{(g)}$ weist man schließlich noch die Ungleichung (3) nach:

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\bar{A}(x)+\bar{B}(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x} - \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x} <$$
$$< \lim_{x\to\infty}\frac{C^{(g)}(x)}{x} + \frac{1}{g} - \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} = \frac{1}{g}.$$

Man könnte den Satz also auch so formulieren, daß die zu Anfang angegebenen Beispiele die einzigen sind, in denen die Ungleichung (2) nicht gilt.

Der Beweis dieses Satzes wird den Hauptteil der vorliegenden Arbeit ausmachen; wir werden ihn gleich so allgemein führen, daß sich ein entsprechender Satz für beliebig viele Summanden an Stelle von zweien ergibt, ähnlich wie dies DYSON [5] für den Satz von MANN getan hat. Der Beweis vollzieht sich in mehreren Schritten, von denen die ersten (§ 1) je eine Reduktion der zu beweisenden Behauptung auf einfachere bringen. Die Aussage VI, auf die der Beweis schließlich zurückgeführt wird, läßt sich mit Hilfe des Satzes VIII beweisen (§ 3); dieser ist eng verwandt mit einem Satz von OSTMANN (s. [8] und die dort zitierten Arbeiten von OSTMANN); für zwei Summanden ist er ein Spezialfall des OSTMANNschen Satzes. Der von OSTMANN gegebene Beweis läßt sich anscheinend nicht auf mehrere Summanden übertragen. So wird hier (§ 2) ein anderer Beweis durchgeführt, der sich auf die der DYSONschen Verallgemeinerung des MANNschen Satzes verwandte Aussage VII stützt. Ihr Beweis entspricht im wesentlichen den in [3] angegebenen Beweisen. Auch sonst wird in den §§ 1 bis 3 ausgiebiger Gebrauch von den bei VAN DER CORPUT sog. e-Transformationen gemacht. Methodisch ist also vieles aus der Arbeit [3] entnommen. Trotzdem wird hier alles vollständig dargestellt, so daß die Kenntnis anderer Literatur nicht vorausgesetzt zu werden braucht.

Im Anschluß an den Beweis sollen noch einige Folgerungen aus dem Dichtesatz für die asymptotische Dichte gezogen werden. Bedenkt man, daß die Mengen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^{(g)}$ von einer Stelle an dieselben Elemente enthalten, also $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{C^{(g)}(x)}{x}$ ist, und daß wegen $\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{A}^{(g)}$ und $\mathfrak{B}\subseteqq\mathfrak{B}^{(g)}$ die Ungleichung $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x} \leqq \lim_{x\to\infty}\frac{A^{(g)}(x)+B^{(g)}(x)}{x}$ gilt, so erhält man aus der Formel (5) die Abschätzung $\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{C(x)}{x} \geqq \underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{A(x)+B(x)}{x} - \frac{1}{g}$. Macht man nun zusätzliche Voraussetzungen über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so kann man über den Wert von g

etwas aussagen und erhält damit Abschätzungen für die Dichte von $\mathfrak{C}$. Auf diese Weise werden sich im letzten Abschnitt (§ 4) unter anderem die schon erwähnten Resultate von Erdös [6] und Ostmann [8], [9] ergeben.

Schließlich sei noch auf einen Zusammenhang mit Ergebnissen von I. Chowla [2] und H. Davenport [4] über die Addition von Restklassen hingewiesen. Diese Resultate kann man erhalten, wenn man unseren Hauptsatz auf solche Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ anwendet, die aus vollen Restklassen nach einem Modul m bestehen. Man erhält so Verallgemeinerungen der genannten Ergebnisse. In diesem Fall vereinfacht sich übrigens der Beweis ganz wesentlich, da die Aussage I. dann trivial ist, während V. leicht direkt zu beweisen ist; die §§ 2 und 3 sowie ein Teil von § 1 wird dazu also gar nicht gebraucht.

§ 1. Der Dichtesatz für die asymptotische Dichte.

Einige Bezeichnungen, die dauernd gebraucht werden, seien zu Anfang kurz zusammengestellt. Es bezeichnen

kleine lateinische Buchstaben ganze rationale Zahlen;

große deutsche Buchstaben Mengen von ganzen Zahlen, insbesondere $\mathfrak{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen;

$\mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{A}_n = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Menge aller Summen $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ mit $a_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$, insbesondere $\mathfrak{A} + c$ für festes c die Menge aller Zahlen $a + c$ mit $a \in \mathfrak{A}$;

$\mathfrak{A}^{(g)}$ für eine Menge $\mathfrak{A}$ und eine natürliche Zahl g die Menge aller Zahlen, die modulo g zu irgendeiner Zahl aus $\mathfrak{A}$ kongruent sind: $\mathfrak{A}^{(g)} = \{a + x\,g;\ a \in \mathfrak{A},\ x \text{ ganz}\}$; $\mathfrak{A}^{(g)}$ besteht also aus vollen Restklassen modulo g und ist die kleinste Menge dieser Art, die $\mathfrak{A}$ umfaßt;

$\mathfrak{A}(x, y)$ die Menge der Zahlen $a \in \mathfrak{A}$, für die $x \leqq a \leqq y$ ist, entsprechend $\mathfrak{B}(x, y)$ für $\mathfrak{B}$ usw.; dabei sei auch $y = \infty$ zugelassen;

$A(x, y)$ die Anzahl der Zahlen aus $\mathfrak{A}(x, y)$, entsprechend $B(x, y)$ für $\mathfrak{B}(x, y)$; insbesondere $A(x, y) = 0$ falls $x > y$ ist;

$\delta(\mathfrak{A}) = \varliminf_{x \to \infty} \frac{A(1, x)}{x}$ die untere asymptotische Dichte der Menge $\mathfrak{A}$, allgemeiner für $n+1$ Mengen $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ $\delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \varliminf_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1, x)$; existiert für die Quotienten $\frac{A_\nu(1, x)}{x}$ nicht nur der limes inferior sondern der Grenzwert schlechthin, so gilt $\delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sum_{\nu=0}^{n} \delta(\mathfrak{A}_\nu)$.

Stimmen zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von einer Stelle ab überein, gibt es also ein x, für das $\mathfrak{A}(x, \infty) = \mathfrak{B}(x, \infty)$ ist, so nennen wir $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ äquivalent und schreiben $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$; daraus folgt $\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{B})$.

Mit diesen Bezeichnungen gilt der

Dichtesatz für die asymptotische Dichte: *Sind* $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ $n+1$ *Mengen ganzer rationaler Zahlen mit der Summe* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so ist entweder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) \tag{6}$$

oder es gibt eine natürliche Zahl g mit den beiden Eigenschaften

$$\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A} \tag{7}$$

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{n}{g}. \tag{8}$$

In der Ungleichung (8) stehen auf beiden Seiten rationale Zahlen mit dem Nenner g; wir können also statt dessen genauer

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{\nu}{g}$$

schreiben mit einer ganzen Zahl $\nu \leqq n$; diese ist positiv, da andernfalls

$$\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{\nu}{g} \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$$

wäre, so daß schon die Ungleichung (6) gälte. Für $n = 1$ ergibt das $\nu = 1$ und damit den in der Einleitung genannten Satz für zwei Summanden. Man überlegt sich leicht an Hand von Beispielen, daß für $n > 1$ die Werte $\nu = 1, \ldots, n$ tatsächlich alle auftreten können.

Zum Beweis des Dichtesatzes zeigen wir zunächst, daß er eine Folge der beiden schwächeren Aussagen I. und II. ist.

I. Ist $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung* (6) *oder es gibt eine natürliche Zahl g mit der Eigenschaft* (7).

II. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1$, *so ist entweder* $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ *oder es gibt zu jeder endlichen Menge* $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteqq \mathfrak{A}$ *eine die Zahlen* $a_1, \ldots, a_k$ *enthaltende Teilmenge* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *und eine natürliche Zahl h so, daß* $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$ *ist und die Ungleichung* $\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{h}$ *gilt.*

Diesem Nachweis schicken wir zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Aus* $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$ *folgt* $\mathfrak{C}^{(h)(g)} = \mathfrak{C}^{(g)}$ [2]).

Beweis. Aus $\mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{C}^{(h)}$ folgt $\mathfrak{C}^{(g)} \subseteqq \mathfrak{C}^{(h)(g)}$, so daß es genügt $\mathfrak{C}^{(h)(g)} \subseteqq \mathfrak{C}^{(g)}$ nachzuweisen. Nun enthält die Menge $\mathfrak{C}^{(h)}$ aus jeder Restklasse modulo g, aus der sie überhaupt eine Zahl c enthält, die sämtlichen Zahlen $c + x\,g\,h$ und diese liegen wegen $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$ für genügend großes x in $\mathfrak{C}$; die in $\mathfrak{C}^{(h)}$ vertretenen Restklassen modulo g sind also dieselben, die auch in $\mathfrak{C}$ vorkommen und das ist die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Aus* $\mathfrak{B}^{(h)} \sim \mathfrak{B}$ *folgt* $(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})^{(h)} \sim \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$.

Beweis. $\mathfrak{B}$ enthält nach Voraussetzung mit einer Zahl b auch die Zahlen $b + x\,h$ für genügend große x; also enthält $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ mit einer Zahl $b + c$ für genügend große x auch die Zahlen $b + c + x\,h$ wie behauptet.

Wir behandeln zuerst den Fall $n = 1$ des Dichtesatzes. Wenn die Ungleichung (6) gilt, sind wir fertig; anderenfalls gibt es nach I. eine natürliche Zahl g mit der Eigenschaft (7); wir wählen die kleinste Zahl dieser Art aus

[2]) Aus $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ folgt für beliebige Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht etwa schon $\mathfrak{A}^{(g)} = \mathfrak{B}^{(g)}$ (oder auch nur $\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{B}^{(g)}$) wie man sich an endlichen Mengen klarmachen kann.

und zeigen, daß für sie die Ungleichung (8) gilt. Dazu wenden wir II. auf die Mengen $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}_0^{(g)}$ und $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1^{(g)}$ mit der Summe $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{(g)}$ an und wählen für $a_1, \ldots, a_k$ ein Vertretersystem für die Restklassen modulo g, die in $\mathfrak{B}$ überhaupt vorkommen. Das liefert entweder die Ungleichung $\delta(\mathfrak{B}) \geqq \delta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1)$ und damit wegen (7) auch

$$\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}) - \frac{1}{g}$$

wie behauptet, oder eine Menge $\mathfrak{C}$ und eine natürliche Zahl h mit

$$\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$$

und

$$\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) - \frac{1}{h}.$$

Wegen der Auswahl der Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ gilt dann $\mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{B}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)}$. Es sei jetzt d der größte gemeinsame Teiler von g und h; beachtet man, daß $\mathfrak{A}^{(d)} = \mathfrak{A}^{(g)(h)}$ ist, so erhält man nach Hilfssatz 1

$$\mathfrak{A}^{(d)} = \mathfrak{A}^{(g)(h)} = \mathfrak{C}^{(g)(h)} = \mathfrak{C}^{(h)(g)} = \mathfrak{C}^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A}.$$

Wegen der Minimaleigenschaft von g folgt daraus $d \geqq g$, also $h \geqq g$ und damit

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{C}^{(g)}) \geqq \delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1) - \frac{1}{h} \geqq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \mathfrak{A}_1^{(g)}) - \frac{1}{g}$$

wie behauptet.

Für beliebiges n beweisen wir den Dichtesatz durch Induktion. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist eben gemacht. Nehmen wir also an, der Satz sei schon für n Summanden bewiesen, und zeigen, daß er auch für $n+1$ Summanden $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ mit der Summe $\mathfrak{A}$ richtig ist. Wenn (6) gilt, sind wir fertig; anderenfalls sei wieder g die kleinste der nach I. sicher vorhandenen Zahlen mit der Eigenschaft (7). Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf die Mengen $\mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ mit der Summe $\mathfrak{B}$ an; das ergibt entweder $\delta(\mathfrak{B}) \geqq \delta(\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1})$, also erst recht

$$\delta(\mathfrak{B}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)} \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}^{(g)}) - \frac{n-1}{g}, \tag{9}$$

oder $\mathfrak{B}^{(h)} \sim \mathfrak{B}$ und

$$\delta(\mathfrak{B}) = \delta(\mathfrak{B}^{(h)}) \geqq \delta(\mathfrak{B}_0^{(h)}, \ldots, \mathfrak{B}_{n-1}^{(h)}) - \frac{n-1}{h} \geqq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}^{(g)}) - \frac{n-1}{h}$$

für ein gewisses h; wir behaupten, daß auch hier $h \geqq g$ ist, und daher die Ungleichung (9) gilt. Zum Beweis sei wieder d der größte gemeinsame Teiler von g und h; nach Hilfssatz 2 gilt dann

$$\mathfrak{A}^{(d)} = \mathfrak{A}^{(g)(h)} = (\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_n^{(g)})^{(h)} \sim \mathfrak{B} + \mathfrak{A}_n^{(g)} = \mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A},$$

also $d \geqq g$ wegen der Minimaleigenschaft von g und damit $h \geqq g$ wie behauptet.

Nun wenden wir den Dichtesatz auf die beiden Summanden $\mathfrak{B} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ und

$\mathfrak{A}_n^{(g)}$ mit der Summe $\mathfrak{A}^{(g)}$ an. Das ergibt unter Benutzung von (9) entweder

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geqq \delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_n^{(g)}) = \delta(\mathfrak{B}) + \delta(\mathfrak{A}_n^{(g)}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1}^{(g)}) + \delta(\mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{n-1}{g},$$

also erst recht die Ungleichung (8), oder $\mathfrak{A}^{(g)(h)} \sim \mathfrak{A}^{(g)}$ für ein gewisses h und

$$\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g\ h)}) \geqq \delta(\mathfrak{B}^{(h)}, \mathfrak{A}_n^{(g)(h)}) - \frac{1}{h} \geqq \delta(\mathfrak{B}) + \delta(\mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{1}{h};$$

auch hier folgt wie oben $h \geqq g$ und damit auf Grund von (9) die Ungleichung (8).

Als nächstes führen wir den Beweis von I. und II. zurück auf die Aussage

III. Ist $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung* (6) *oder es gibt zu jeder Zahl* $a \in \mathfrak{A}$ *eine a enthaltende Teilmenge* $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *und eine natürliche Zahl* $g = g(a)$ *so, daß* $\mathfrak{C}^{(g)} \sim \mathfrak{C}$ *und*

$$\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g}$$

ist.

Beweis von I. Wir unterscheiden zwei Fälle: Entweder gibt es unter den Zahlen $g(a)$ beliebig große, dann folgt aus

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g(a)}$$

die Ungleichung (6); oder die Zahlen $g(a)$ sind beschränkt; dann sei h ein gemeinsames Vielfaches aller Zahlen $g(a)$. Nach III. enthält $\mathfrak{A}$ mit einer Zahl a auch alle Zahlen $a + x\,g(a)$, falls nur x genügend groß ist, also erst recht für großes x die Zahlen $a + x\,h$; das bedeutet aber gerade $\mathfrak{A}^{(h)} \sim \mathfrak{A}$ wie behauptet.

Beweis von II. durch Induktion nach k. Der Induktionsanfang $k = 1$ folgt unmittelbar aus III. Es sei der Beweis also schon für $k-1$ Zahlen $a_1, \ldots, a_{k-1}$ geführt. Ist nun $\delta(\mathfrak{A}) < \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1)$ und sind k Zahlen $a_1, \ldots, a_k$ aus $\mathfrak{A}$ gegeben, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung eine Menge $\mathfrak{D}$ und eine Zahl l mit den Eigenschaften

$$\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \subseteqq \mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{D}^{(l)} \sim \mathfrak{D}, \qquad \delta(\mathfrak{D}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{l},$$

und nach III. eine Menge $\mathfrak{E}$ und eine Zahl m mit

$$a_k \in \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}, \qquad \mathfrak{E}^{(m)} \sim \mathfrak{E}, \qquad \delta(\mathfrak{E}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{m}.$$

Wir setzen jetzt $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} \cup \mathfrak{E}$; dann gilt jedenfalls $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteqq \mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{A}$. Ist nun $\mathfrak{D} \subseteqq \mathfrak{E}^{(m)}$, so setzen wir $h = m$ und haben dann $\mathfrak{C}^{(h)} = (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{E})^{(m)} = \mathfrak{E}^{(m)} \sim \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{C}$, also wegen $\mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{C}^{(h)}$ auch $\mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C}$, und $\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{E}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{h}$ wie behauptet; entsprechend setzen wir $h = l$, wenn $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{D}^{(l)}$ gilt. Ist keines von beiden der Fall, so sei h das kleinste gemeinsame Vielfache von l und m; dann gilt ersichtlich

$$\mathfrak{C}^{(h)} = (\mathfrak{D} \cup \mathfrak{E})^{(h)} \subseteqq \mathfrak{D}^{(l)} \cup \mathfrak{E}^{(m)} \sim \mathfrak{D} \cup \mathfrak{E} = \mathfrak{C}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{C}^{(h)} \sim \mathfrak{C};$$

es bleibt zu zeigen, daß $\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{h}$ ist. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ bzw. $\overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ die Komplementärmenge von $\mathfrak{D}^{(l)}$ bzw. $\mathfrak{E}^{(m)}$ und haben dann

$$\delta(\mathfrak{C}) = \delta(\mathfrak{D} \cup \mathfrak{E}) = \delta(\mathfrak{D}^{(l)} \cup \mathfrak{E}^{(m)})$$
$$= \begin{Bmatrix} \delta(\mathfrak{D}^{(l)}) + \delta\left(\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}\right) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{l} + \delta\left(\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}\right) \\ \delta(\mathfrak{E}^{(m)}) + \delta\left(\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}\right) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1) - \frac{1}{m} + \delta\left(\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}\right) \end{Bmatrix}.$$

Mit $l' = \frac{h}{l}$ und $m' = \frac{h}{m}$ genügt es also zu zeigen, daß mindestens eine der beiden Ungleichungen

$$\delta\left(\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}\right) \geqq \frac{1}{l} - \frac{1}{h} = \frac{l' - 1}{h}$$

$$\delta\left(\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}\right) \geqq \frac{1}{m} - \frac{1}{h} = \frac{m' - 1}{h}$$

gilt, daß also entweder in $\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ mindestens $l' - 1$ oder in $\mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ mindestens $m' - 1$ Restklassen modulo h liegen. Wir setzen jetzt voraus, daß $l' \leqq m'$ ist — der Fall $m' < l'$ läßt sich durch Vertauschung von $\mathfrak{D}$ und l mit $\mathfrak{E}$ und m auf diesen zurückführen. Da wir angenommen hatten, daß $\mathfrak{E}$ nicht in $\mathfrak{D}^{(l)}$ liegt, gibt es in $\mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ eine Restklasse modulo h; es sei $\mathfrak{R}$ die zugehörige Restklasse modulo d, dem größten gemeinsamen Teiler von l und m; wir werden zeigen, daß schon $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ mindestens $l' - 1$ oder $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ mindestens $m' - 1$ Restklassen modulo h enthält. $\mathfrak{R}$ zerfällt modulo l in $\frac{l}{d} = \frac{h}{m} = m'$ und modulo m in $\frac{m}{d} = \frac{h}{l} = l'$ Restklassen und jede dieser Restklassen zerfällt wieder in l' bzw. m' Restklassen modulo h. Es bestehe jetzt $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}^{(l)}$ aus u Restklassen modulo l und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)}$ aus v Restklassen modulo m; dann besteht $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}} = (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)}) \cap (\mathfrak{R} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}})$ aus $v(m' - u)$ und $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{D}^{(l)} \cap \overline{\mathfrak{E}^{(m)}}$ aus $u(l' - v)$ Restklassen modulo h, und wir haben daher zu zeigen, daß entweder

$$v(m' - u) \geqq l' - 1$$

oder

$$u(l' - v) \geqq m' - 1$$

gilt. Nach Konstruktion ist $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{E}^{(m)} \cap \overline{\mathfrak{D}^{(l)}}$ nicht leer, also

$$v \geqq 1 \quad \text{und} \quad m' - u \geqq 1.$$

Ist auch noch

$$u \geqq 1 \quad \text{und} \quad l' - v \geqq 1,$$

so schreiben wir die fraglichen Ungleichungen um zu

$$(v - 1)(m' - u - 1) + v + m' - u - 1 \geqq l' - 1$$
$$(u - 1)(l' - v - 1) + u + l' - v - 1 \geqq m' - 1;$$

eine von beiden ist sicher erfüllt, wenn eine der beiden Ungleichungen

$$v + m' - u \geqq l'$$
$$u + l' - v \geqq m'$$

zutrifft, und das ist ersichtlich immer der Fall. Ist schließlich $u = 0$, so folgt aus der Annahme $l' \leqq m'$ die Ungleichung $v(m' - u) \geqq m' \geqq l' - 1$; ist aber $l' - v = 0$, so folgt $v(m' - u) \geqq l' \geqq l' - 1$ und das beweist die Behauptung.

Die Aussage III. formen wir noch etwas um. Die Zahl $a \in \mathfrak{A}$ habe die Darstellung $a = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ mit $a_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$. Wir betrachten die Mengen $\overline{\mathfrak{A}}_\nu = \mathfrak{A}_\nu - a_\nu$ mit der Summe $\overline{\mathfrak{A}} = \sum_{\nu=0}^{n} (\mathfrak{A}_\nu - a_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu - \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \mathfrak{A} - a$. Die Anzahl der Elemente aus $\overline{\mathfrak{A}}_\nu(1, x)$ ist gleich der Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{A}_\nu(1 + a_\nu, x + a_\nu)$: $\overline{A}_\nu(1, x) = A_\nu(1 + a_\nu, x + a_\nu)$ und daher für $x \to \infty$ $\overline{A}_\nu(1, x) = A_\nu(1, x) + O(1)$ und entsprechend $\overline{A}(1, x) = A(1, x) + O(1)$. Daraus folgt $\delta(\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n) = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ und $\delta(\overline{\mathfrak{A}}) = \delta(\mathfrak{A})$. Die Formel (6) ist also gleichwertig mit der entsprechenden Formel für $\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n$ und $\overline{\mathfrak{A}}$. Der zweite Teil der Aussage III. ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Zahl g und einer Teilmenge $\overline{\mathfrak{C}}[= \mathfrak{C} - a]$ von $\overline{\mathfrak{A}}$, welche die Null enthält, mit den Eigenschaften $\overline{\mathfrak{C}}^{(g)}[\sim \mathfrak{C}^{(g)} - a \sim \mathfrak{C} - a] \sim \overline{\mathfrak{C}}$ und $\delta(\overline{\mathfrak{C}}) \left[\geqq \delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g} \right] \geqq \delta(\overline{\mathfrak{A}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{A}}_n) - \frac{n}{g}$. Wir haben also zu zeigen (die Querstriche lassen wir der Einfachheit halber wieder weg):

IV. Ist $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ *und* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) \tag{6}$$

oder es gibt eine die Null enthaltende Teilmenge $\mathfrak{C}$ *von* $\mathfrak{A}$ *und eine natürliche Zahl* g *so, daß die Formeln*

$$\mathfrak{C}^{(g)} \sim \mathfrak{C} \tag{10}$$

$$\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g} \tag{11}$$

gelten.

Zum Beweis dieser Behauptung müssen wir etwas weiter ausholen. Es seien — unabhängig von dem bisherigen — $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Zahlenmengen und e eine ganze Zahl. Dann definieren wir zwei neue Mengen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ durch

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cup (\mathfrak{B} + e), \qquad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cap (\mathfrak{A} - e).$$

Diese haben folgende Eigenschaften:

a) Die Summe von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ ist in der von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthalten:

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' \subseteqq \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

Beweis. Ist $a' \in \mathfrak{A}'$ und $b' \in \mathfrak{B}'$, so unterscheiden wir zwei Fälle. Entweder ist $a' \in \mathfrak{A}$, dann benutzen wir die Tatsache, daß $b' \in \mathfrak{B}$ ist, und erhalten

$a'+b'\in\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$; oder es ist $a'\in\mathfrak{B}+e$, dann nutzen wir aus, daß $b'\in\mathfrak{A}-e$ ist, und erhalten $a'+b'\in(\mathfrak{B}+e)+(\mathfrak{A}-e)=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ wie behauptet.

b) Es ist

$$A'(x,y)+B'(x-e,y-e)=A(x,y)+B(x-e,y-e) \tag{12}$$

und daher für beliebige Mengen $\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_n$

$$\delta(\mathfrak{A}',\mathfrak{B}',\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_n)=\delta(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}_1,\ldots,\mathfrak{C}_n).$$

Beweis. Wegen $A(x,y)+B(x-e,y-e)=\sum_{z=x}^{y}A(z,z)+B(z-e,z-e)$ und der entsprechenden Gleichung für $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{B}}$ genügt es zu zeigen, daß $A'(z,z)+B'(z-e,z-e)=A(z,z)+B(z-e,z-e)$ gilt, und das trifft zu, da beide Seiten gleich 2 sind wenn $z\in\mathfrak{A}$ und $z-e\in\mathfrak{B}$ ist, gleich 1 wenn eine dieser Relationen gilt, und gleich 0 wenn keine zutrifft. Aus (12) folgt $A'(1,y)+B'(1,y)=A(1,y)+B(1,y)+O(1)$ für $y\to\infty$; also gilt auch die zweite Formel.

c) Ist $e\in\mathfrak{A}$ und $0\in\mathfrak{B}$, so ist auch $0\in\mathfrak{B}'$.

d) $\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'\subseteqq\mathfrak{B}$.

e) $\mathfrak{B}'+e\subseteqq\mathfrak{B}+e\subseteqq\mathfrak{A}'$.

Von jetzt ab nehmen wir an, es sei $e\in\mathfrak{A}$ und $0\in\mathfrak{B}$, und sagen dann mit VAN DER CORPUT [3], $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ entstehen aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch eine e-Transformation. Nach c) liegt dann auch $0\in\mathfrak{B}'$; ist nun e' eine Zahl aus $\mathfrak{A}'$, so können wir auf $\mathfrak{A}',\mathfrak{B}'$ und e' das gleiche Verfahren anwenden wie eben auf $\mathfrak{A},\mathfrak{B}$ und e und erhalten zwei Mengen $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$; mit diesen können wir ebenso verfahren und kommen so zu weiteren Mengenpaaren. Von allen diesen Paaren, die sich aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch mehrmalige Anwendung von e-Transformationen ergeben, sagen wir, sie seien von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeleitet. Für solche abgeleitete Mengen wollen wir noch ein weiteres Ergebnis herleiten. Dazu betrachten wir die e) entsprechende Relation $\mathfrak{B}''+e'\subseteqq\mathfrak{A}''$ und die aus d) und e) folgende $\mathfrak{B}''+e\subseteqq\mathfrak{B}'+e\subseteqq\mathfrak{A}'\subseteqq\mathfrak{A}''$. Zusammen ergibt das $\mathfrak{B}''+\{e,e'\}\subseteqq\mathfrak{A}''$. Entsprechend zeigt man $\mathfrak{B}'''+\{e,e',e''\}\subseteqq\mathfrak{A}'''$ usw. Nun können wir wegen $\mathfrak{A}\subseteqq\mathfrak{A}'\subseteqq\mathfrak{A}''\subseteqq\ldots$ für $e,e',e'',\ldots$ beliebige Zahlen aus $\mathfrak{A}$ wählen; ist uns eine endliche Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{A}$ vorgegeben, so können wir z.B. gerade die Elemente von $\mathfrak{E}$ nehmen und erhalten so das Ergebnis:

f) Ist $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}$, so gibt es zwei von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{B}^*$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{B}^*+\mathfrak{E}\subseteqq\mathfrak{A}^*.$$

Wir kehren jetzt zu den Mengen $\mathfrak{A}_0,\ldots,\mathfrak{A}_n$ aus IV. zurück. Die Menge $\mathfrak{A}_0$ wird im folgenden eine durch den Beweis bedingte Sonderstellung einnehmen, obwohl das Ergebnis völlig symmetrisch in den $\mathfrak{A}_\nu$ ist. Außer $\mathfrak{A}_0$ wählen wir noch eine andere Menge $\mathfrak{A}_k$ $(1\leqq k\leqq n)$ und eine Zahl $e\in\mathfrak{A}_0$ aus; auf $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_k$ wenden wir die e-Transformation an und erhalten so zwei Mengen $\mathfrak{A}_0'$ und $\mathfrak{A}_k'$; setzen wir noch $\mathfrak{A}_\nu'=\mathfrak{A}_\nu$ für $\nu\neq 0,k$ und $\mathfrak{A}'=\sum_{\nu=0}^{n}\mathfrak{A}_\nu'$, so gilt auf Grund der

Eigenschaften a) bis d) der e-Transformation und der Voraussetzung $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ aus IV.

$$\mathfrak{A}' \subseteqq \mathfrak{A}, \tag{13}$$

$$\delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n), \tag{14}$$

$$0 \in \mathfrak{A}'_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n), \tag{15}$$

$$\mathfrak{A}_0 \subseteqq \mathfrak{A}'_0, \quad \mathfrak{A}'_\nu \subseteqq \mathfrak{A}_\nu \quad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{16}$$

Auf die Mengen $\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n$ können wir wieder das gleiche Verfahren (mit anderen $e' \in \mathfrak{A}'_0$ und k' zwischen 1 und n) anwenden usw. Alle Mengensysteme, die wir so erhalten, nennen wir von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleitet. Für sie gelten wieder die Eigenschaften (13) bis (16). Ist nun $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, so gibt es nach f) zwei von $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}^*_0$ und $\mathfrak{A}^*_1$, also indem man $\mathfrak{A}^*_\nu = \mathfrak{A}_\nu$ setzt für $\nu \neq 0, 1$, ein von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitetes System $\{\mathfrak{A}^*_\nu\}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{A}^*_1 + \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}^*_0$. Hieraus erhalten wir — wieder nach f) angewandt auf $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}^*_0$ und $\mathfrak{A}^*_2$ — ein abgeleitetes System $\{\mathfrak{A}^{**}_\nu\}$ mit $\mathfrak{A}^{**}_2 + \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_0$; außerdem gilt wegen (16) noch $\mathfrak{A}^{**}_1 + \mathfrak{E} = \mathfrak{A}^*_1 + \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}^*_0 \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_0$, also zusammen $(\mathfrak{A}^{**}_1 \cup \mathfrak{A}^{**}_2) + \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_0$. So fortfahrend erhält man das Ergebnis:

Ist $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, so gibt es ein von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitetes System von Mengen $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ mit der Eigenschaft

$$\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) + \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}'_0. \tag{17}$$

Wir werden im folgenden den Beweis von IV. nicht für $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ sondern für irgendwelche abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n$ führen. Das genügt, denn wenn IV. für $\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n$ richtig ist, so gilt entweder $\delta(\mathfrak{A}') \geqq \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n)$ und damit wegen (13) und (14) $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}') \geqq \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, das ist die Ungleichung (6); oder es gibt eine Menge $\mathfrak{C}$ und eine Zahl g mit den Eigenschaften

$$0 \in \mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{A}', \quad \mathfrak{C}^{(g)} \sim \mathfrak{C},$$

$$\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) - \frac{n}{g}.$$

Wegen (13) gilt dann auch $0 \in \mathfrak{C} \subseteqq \mathfrak{A}$ und wegen (14) auch $\delta(\mathfrak{C}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - \frac{n}{g}$, so daß also IV. auch für $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ gilt.

Es kommt nun darauf an, unter den abgeleiteten Mengensystemen eines herauszufinden, für das der Beweis von IV. möglichst einfach wird. Dazu ordnen wir jeder Menge $\mathfrak{C}$ zwei Zahlen $f(\mathfrak{C})$ und $g(\mathfrak{C})$ zu, und zwar sei $f(\mathfrak{C})$ das Minimum aller Differenzen von Zahlen aus $\mathfrak{C}$:

$$f(\mathfrak{C}) = \min_{\substack{c, c' \in \mathfrak{C} \\ c < c'}} (c' - c)$$

und $g(\mathfrak{C})$ der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen aus $\mathfrak{C}$:

$$g(\mathfrak{C}) = \underset{c \in \mathfrak{C}}{\text{g.g.T.}}\,(c).$$

$g(\mathfrak{C})$ teilt sicher auch alle Differenzen $c'-c$, so daß $g(\mathfrak{C}) \leqq f(\mathfrak{C})$ folgt. Uns interessieren besonders die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ und $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ für abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ (die Menge $\mathfrak{A}'_0$ bleibt dabei, ihrer Sonderstellung entsprechend, unberücksichtigt). Setzen wir abkürzend $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = f$, so erhalten wir aus der Definition von f für die k-te positive Zahl a_k aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ die Abschätzung $a_k \geqq k f$ und damit für $\nu = 1, \ldots, n$ die Ungleichung $A'_\nu(1, x) \leqq \frac{x}{f}$. Wegen $\mathfrak{A}'_0 \leqq \mathfrak{A}'$ gibt das

$$(18)\quad \begin{cases} \delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}') \geqq \delta(\mathfrak{A}'_0) \geqq \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left[A'_0(1,x) + A'_1(1,x) + \cdots + A'_n(1,x) - \frac{n\,x}{f}\right] \\ \quad = \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) - \frac{n}{f} = \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) - n f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)^{-1}. \end{cases}$$

Wegen $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) \leqq f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ folgt hieraus erst recht die Ungleichung

$$(19)\qquad \delta(\mathfrak{A}') \geqq \delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) - n\, g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)^{-1}.$$

Wir betrachten jetzt die Gesamtheit der Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ für alle abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$. Ist sie unbeschränkt, so folgt aus (18) sofort die Ungleichung (6) und wir sind fertig. Anderenfalls sind die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ und damit auch $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ beschränkt. Wir können daher unter den abgeleiteten Systemen eines aussuchen, für das $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ maximal ist. Für alle von diesen $\mathfrak{A}'_\nu$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ gilt dann auf Grund der Wahl von $\mathfrak{A}'_\nu$ die Ungleichung $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right) \leqq g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$. Andererseits ist nach (16) $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu \leqq \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$; es gilt also auch die umgekehrte Ungleichung und daher $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$. Für diese Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ kann man nun die Zahl g und die Menge $\mathfrak{C}$ aus IV. direkt angeben: Wir setzen $g = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}' = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$; die Ungleichung (11) folgt dann aus (19), und es bleibt daher nur die Aussage V. zu beweisen:

V. Ist $0 \in \mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ *und gilt* $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) = g$ *für alle von* $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *abgeleiteten Mengen* $\mathfrak{A}'_\nu$, *so gilt entweder die Ungleichung* (6) *oder es ist* $\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A}$ [3]).

Enthält hier $\mathfrak{A}$ aus jeder Restklasse modulo g mindestens eine Zahl, liegen z.B. g aufeinanderfolgende Zahlen in $\mathfrak{A}_0$, so ist $\mathfrak{A}^{(g)}$ gleich der Menge $\mathfrak{Z}$ aller ganzen Zahlen und die zweite Behauptung aus V. lautet dann $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$. Auf

[3]) Die Voraussetzung, daß die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ beschränkt sind, die wir nach dem eben bewiesenen noch machen könnten, ist hier noch nicht nötig; wir werden die Zahlen f erst später brauchen.

diesen Fall, daß g aufeinanderfolgende Zahlen in $\mathfrak{A}_0$ liegen, wollen wir die Aussage V. zurückführen. Dazu beachten wir, daß nach Definition von g alle Zahlen aus $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ durch g teilbar sind; jedes $a_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$ läßt sich also in die Gestalt $a_\nu = d_\nu g$ setzen. Die Zahlen d_ν bilden eine Menge $\mathfrak{D}_\nu$ und wir schreiben $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{D}_\nu g$ [4]). Die Menge $\mathfrak{A}_0$ zerlegen wir in Restklassen modulo g: $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{R}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{R}_g$. Dabei kann ein Teil der Mengen $\mathfrak{R}_\mu$ auch leer sein; wir denken uns die Numerierung so gewählt, daß $\mathfrak{R}_1$ bis $\mathfrak{R}_h$ je mindestens eine Zahl enthalten, während $\mathfrak{R}_{h+1}$ bis $\mathfrak{R}_g$ leer sind. Aus jeder der Mengen $\mathfrak{R}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, h)$ wählen wir eine Zahl r_μ aus und können dann schreiben $\mathfrak{R}_\mu - r_\mu = \mathfrak{C}_\mu g$. Zusammengefaßt haben wir also

$$(20) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A}_0 = (\mathfrak{C}_1 g + r_1) \cup \ldots \cup (\mathfrak{C}_h g + r_h) \\ \mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{D}_\nu g \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Nach Konstruktion ist die Null sowohl in den Mengen $\mathfrak{C}_\mu$ als auch in den $\mathfrak{D}_\nu$ enthalten. Aus diesen Mengen bauen wir jetzt neue auf, indem wir setzen

$$(21) \qquad \begin{cases} \mathfrak{B}_0 = (\mathfrak{C}_1 h - 1) \cup (\mathfrak{C}_2 h + 2) \cup \ldots \cup (\mathfrak{C}_h h + h) \\ \mathfrak{B}_\nu = \mathfrak{D}_\nu h \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

Dann enthält $\mathfrak{B}_0$ die h aufeinanderfolgenden Zahlen $1, \ldots, h$, während die Null in $\mathfrak{B}_1$ bis $\mathfrak{B}_n$ enthalten ist. Aus den Formeln (20) und (21) folgt für $x \to \infty$

$$B_0(1, xh) = \sum_{\mu=1}^{h} C_\mu(1, x) + O(1) = A_0(1, xg) + O(1)$$
$$B_\nu(1, xh) = D_\nu(1, x) = A_\nu(1, xg) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

und daher

$$\delta(\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{xh} \sum_{\nu=0}^{n} B_\nu(1, xh)$$
$$= \frac{g}{h} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{xg} \left[\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1, xg) + O(1) \right] = \frac{g}{h} \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n).$$

Zwischen den Summen $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ und $\mathfrak{B} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{B}_\nu$ besteht folgender Zusammenhang

$$(22) \qquad \begin{cases} \mathfrak{A} = \bigcup_{\mu=1}^{h} (\mathfrak{C}_\mu g + r_\mu) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu g = \bigcup_{\mu=1}^{h} \left[\left(\mathfrak{C}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu \right) g + r_\mu \right] \\ \mathfrak{B} = \bigcup_{\mu=1}^{h} (\mathfrak{C}_\mu h + \mu) + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu h = \bigcup_{\mu=1}^{h} \left[\left(\mathfrak{C}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu \right) h + \mu \right]. \end{cases}$$

Das ist ein zu (20) und (21) analoges Formelpaar; daher folgt auch hier $\delta(\mathfrak{B}) = \frac{g}{h} \delta(\mathfrak{A})$. Die Ungleichung (6) ist also mit der entsprechenden für $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{B}$ an Stelle von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}$ gleichbedeutend.

[4]) Davon zu unterscheiden ist das Symbol $g\mathfrak{D}_\nu$, mit dem man die g-fache Summe $\mathfrak{D}_\nu + \cdots + \mathfrak{D}_\nu$ bezeichnet.

Die durch (20) und (21) gegebene Zuordnung der Mengen $\mathfrak{B}_\nu$ zu den $\mathfrak{A}_\nu$ dehnen wir auf die von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ aus, indem wir in (20) und (21) einfach $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{C}_\mu, \mathfrak{D}_\nu$ durch $\mathfrak{A}'_\nu, \mathfrak{B}'_\nu, \mathfrak{C}'_\mu, \mathfrak{D}'_\nu$ ersetzen; daß die Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ tatsächlich eine Darstellung nach Art der Formeln (20) zulassen, sieht man so: Zunächst sei $\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{A}_\nu$ für $\nu = 2, \ldots, n$ während $\mathfrak{A}'_0$ und $\mathfrak{A}'_1$ aus $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ durch eine e-Transformation hervorgehen:

$$\mathfrak{A}'_0 = \mathfrak{A}_0 \cup (\mathfrak{A}_1 + e), \qquad \mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}_1 \cap (\mathfrak{A}_0 - e).$$

Dabei wollen wir der Einfachheit halber annehmen, daß e in $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{C}_1 g + r_1$ liegt: $e = c_1 g + r_1$. Dann ist

$$\mathfrak{A}'_0 = \bigcup_{\mu=1}^{h} (\mathfrak{C}_\mu g - r_\mu) \cup (\mathfrak{D}_1 g + c_1 g + r_1) = \left[(\mathfrak{C}_1 \cup (\mathfrak{D}_1 + c_1))\, g + r_1\right] \cup \bigcup_{\mu=2}^{h} (\mathfrak{C}_\mu g + r_\mu)$$

$$\mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{D}_1 g \cap \bigcup_{\mu=1}^{h} [(\mathfrak{C}_\mu - c_1)\, g + r_\mu - r_1] = [\mathfrak{D}_1 \cap (\mathfrak{C}_1 - c_1)]\, g,$$

letzteres, da die Zahlen $r_\mu - r_1$ für $\mu \neq 1$ nicht durch g teilbar sind, und

$$\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{D}_\nu g \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

Dies sind gerade Darstellungen von der Art der Formeln (20). Durch Vergleich erhält man

$$\mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}_1 \cup (\mathfrak{D}_1 + c_1) \qquad \mathfrak{D}'_1 = \mathfrak{D}_1 \cap (\mathfrak{C}_1 - c_1)$$

$$\mathfrak{C}'_\mu = \mathfrak{C}_\mu \quad (\mu = 2, \ldots, h) \qquad \mathfrak{D}'_\nu = \mathfrak{D}_\nu \quad (\nu = 2, \ldots, n).$$

$\mathfrak{C}'_1$ und $\mathfrak{D}'_1$ entstehen aus $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{D}_1$ also wieder durch eine e-Transformation. Da hierbei $e = c_1 g + r_1$ beliebig aus $\mathfrak{R}_1$, also c_1 beliebig aus $\mathfrak{C}_1$, gewählt werden kann und wir außerdem das Indexpaar $\mu = 1, \nu = 1$ durch ein beliebiges anderes $\mu = k, \nu = l$ ersetzen können, ergibt sich das Resultat: Einer e-Transformation, angewandt auf $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_l$ entspricht bei den Mengen $\mathfrak{C}_\mu$ und $\mathfrak{D}_\nu$ wieder eine e-Transformation zweier Mengen $\mathfrak{C}_k$ und $\mathfrak{D}_l$ und umgekehrt. Da nun die Mengen $\mathfrak{B}_\nu$ mit den $\mathfrak{C}_\mu$ und $\mathfrak{D}_\nu$ in ganz ähnlicher Weise zusammenhängen wie die Mengen $\mathfrak{A}_\nu$, so hat man: Einer e-Transformation zweier Mengen $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_l$ entspricht eine e-Transformation von $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_l$ und umgekehrt. Durch mehrmalige Anwendung dieses Schlusses erhält man endlich das Ergebnis: Bei der durch (20) und (21) gegebenen Zuordnung entsprechen den von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleiteten Mengen die von $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_n$ abgeleiteten Mengen und umgekehrt. Als letztes müssen wir untersuchen, wie sich die Voraussetzung $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) = g$ und die Behauptung $\mathfrak{A}^{(g)} \sim \mathfrak{A}$ übertragen. Die erste ist nach (20) gleichwertig mit $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu\right) = 1$ und dies nach (21) mit $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{B}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{B}_\nu\right) = h$; die zweite ist nach (22) gleichbedeutend mit $\mathfrak{C}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{D}_\nu \sim \mathfrak{Z}$ für $\mu = 1, \ldots, h$, also nach der zweiten Formel (22) mit $\mathfrak{B}^{(h)} \sim \mathfrak{B}$ oder, da $\mathfrak{B}$ aus jeder Restklasse modulo h eine Zahl enthält, mit $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{Z}$. Wir

haben also an Stelle von V. nur noch den Satz VI zu beweisen (statt $\mathfrak{B}_\nu, \mathfrak{B}, h$ schreiben wir wieder $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{A}, g$):

VI. Ist $0 \in \mathfrak{A}_\nu$, *liegen* g *aufeinanderfolgende Zahlen in* $\mathfrak{A}_0$ *und ist* $g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) = g$ *für alle von* $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *abgeleiteten Mengen* $\mathfrak{A}'_\nu$, *so gilt für die Summe* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ *entweder die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \tag{6}$$

oder es ist $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$.

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einen Hilfssatz, der als Satz VIII im nächsten Abschnitt bewiesen wird.

§ 2. Zwei Hilfssätze.

Wir beweisen jetzt zunächst einen Satz, der die Theoreme 3 und 9 aus [3] in sich vereinigt und wie diese bewiesen werden kann. Da ein Beweis sich hier ohne Schwierigkeiten anschließen läßt, ist er der Vollständigkeit halber ausgeführt; er entspricht in seinen Grundzügen den von VAN DER CORPUT in [3] gegebenen Beweisen.

VII. $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ *seien Mengen nichtnegativer ganzer Zahlen; ferner sei* $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$, $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ *und*

$$A_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(1, x) \geqq \alpha(x+1) \quad \textit{für} \quad x = 0, 1, \ldots .$$

Dann ist

$$A(0, x) \geqq \alpha(x+1) \quad \textit{für} \quad x = 0, 1, \ldots . \tag{23}$$

Den Beweis führen wir mittels des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz 3. *Unter den Voraussetzungen von VII. gibt es zu irgend zwei Zahlen* k *und* l $(k \geqq 0, 0 \leqq l \leqq n)$ *ein von* $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ *abgeleitetes System von Mengen* $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ *mit den Eigenschaften*

$$A'_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{l} A'_\nu(1, x-k-1) + \sum_{\nu=l+1}^{n} A'_\nu(1, x-k) \geqq \alpha(x+1) \tag{24}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0, k) \subseteqq \mathfrak{A}'_0 & \textit{für} \quad \nu = 1, \ldots, l, \\ \mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0, k-1) \subseteqq \mathfrak{A}'_0 & \textit{für} \quad \nu = l+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{25}$$

Beweis von VII. Wir setzen in (24) $x = k$ und erhalten wegen $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{A}' = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}'_\nu \geqq \mathfrak{A}'_0$ die Ungleichung

$$A(0, k) \geqq A'_0(0, k) \geqq \alpha(k+1).$$

Das ist gerade die behauptete Ungleichung (23) für $x = k$; da $k \geqq 0$ beliebig war, sind wir fertig.

Beweis des Hilfssatzes. Für $k=l=0$ können wir $\mathfrak{A}'_\nu=\mathfrak{A}_\nu$ setzen; (24) ist dann eine der Voraussetzungen von VII. und (25) ist trivialerweise erfüllt, da $\mathfrak{A}'_0(0,k-1)=\mathfrak{A}_0(0,-1)$ leer ist. Wir beweisen den Hilfssatz jetzt für festes k durch Induktion nach l. Von $k=l=0$ ausgehend kommen wir so bis $k=0$, $l=n$. In diesem letzten Fall sind die Behauptungen gleichwertig mit denen für $k-1$, $l=0$. Durch nochmalige Anwendung des Induktionsschlusses kommen wir dann bis $k=1$, $l=n$ und das ist wieder gleichwertig mit dem Fall $k=2$, $l=0$ usw. Zum Beweis können wir also annehmen, daß $l>0$ ist und der Hilfssatz schon für k und $l-1$ an Stelle von k und l gilt. Dann gibt es also von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ mit

$$A''_0(0,x)+\sum_{\nu=1}^{l-1}A''_\nu(1,x-k-1)+\sum_{\nu=l}^{n}A''_\nu(1,x-k)\geqq\alpha(x+1),$$

$$\mathfrak{A}''_\nu+\mathfrak{A}''_0(0,k)\subseteqq\mathfrak{A}''_0\quad\text{für}\quad\nu=1,\ldots,l-1,$$

$$\mathfrak{A}''_\nu+\mathfrak{A}''_0(0,k-1)\subseteqq\mathfrak{A}''_0\quad\text{für}\quad\nu=l,\ldots,n.$$

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

a) Liegt k nicht in $\mathfrak{A}''_0$, so setzen wir $\mathfrak{A}'_\nu=\mathfrak{A}''_\nu$. Wegen $\mathfrak{A}'_0(0,k)=\mathfrak{A}''_0(0,k)=\mathfrak{A}''_0(0,k-1)$ gilt dann (25); außerdem ist

$$(26)\qquad\left\{\begin{aligned}&A'_0(0,x)+\sum_{\nu=1}^{l-1}A'_\nu(1,x-k-1)+\sum_{\nu=l}^{n}A'_\nu(1,x-k)\\&=A''_0(0,x)+\sum_{\nu=1}^{l-1}A''_\nu(1,x-k-1)+\sum_{\nu=l}^{n}A''_\nu(1,x-k)\geqq\alpha(x+1).\end{aligned}\right.$$

Aus (25) und (26) folgt nun auch (24). Liegt nämlich $x-k$ nicht in $\mathfrak{A}'_l$, so ist $A'_l(1,x-k-1)=A'_l(1,x-k)$ und die linken Seiten von (24) und (26) stimmen überein. Ist aber $x-k\in\mathfrak{A}'_l$, so gilt wegen (25) $\mathfrak{A}'_0(0,k)+(x-k)\subseteqq\mathfrak{A}'_0(0,k)+\mathfrak{A}'_l\subseteqq\mathfrak{A}'_0$. Also enthält $\mathfrak{A}'_0$ mindestens so viele Zahlen zwischen $x-k$ und x wie zwischen 0 und k: $A'_0(x-k,x)\geqq A'_0(0,k)$. Nach (26) ist weiter $A'_0(0,k)\geqq\alpha(k+1)$ und daher wieder nach (26) mit $x-k-1$ statt x

$$\begin{aligned}&A'_0(0,x)+\sum_{\nu=1}^{l}A'_\nu(1,x-k-1)+\sum_{\nu=l+1}^{n}A'_\nu(1,x-k)\\&\geqq A'_0(x-k,x)+A'_0(0,x-k-1)+\sum_{\nu=1}^{l-1}A'_\nu(1,x-2k-2)+\sum_{\nu=l}^{n}A'_\nu(1,x-2k-1)\\&\geqq\alpha(k+1)+\alpha(x-k)=\alpha(x+1)\end{aligned}$$

wie behauptet.

b) Liegt k in $\mathfrak{A}''_0$, so wenden wir auf $\mathfrak{A}''_0$ und $\mathfrak{A}''_l$ die e-Transformation mit $e=k$ an und erhalten $\mathfrak{A}'_0=\mathfrak{A}''_0\cup(\mathfrak{A}''_l+k)$ und $\mathfrak{A}'_l=\mathfrak{A}''_l\cap(\mathfrak{A}''_0-k)$; außerdem setzen wir $\mathfrak{A}'_\nu=\mathfrak{A}''_\nu$ für $\nu\neq0,e$. Da $\mathfrak{A}_l$ und daher auch $\mathfrak{A}''_l$ aus nichtnegativen Zahlen besteht, sind alle Zahlen, die in $\mathfrak{A}''_l+k$ liegen $\geqq k$. Aus der Definition von $\mathfrak{A}'_0$ liest man daher die Gleichung $\mathfrak{A}'_0(0,k)=\mathfrak{A}''_0(0,k)\cup\{k\}=\mathfrak{A}''_0(0,k)$ ab.

Also gilt nach (16)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0,k) &= \mathfrak{A}''_\nu + \mathfrak{A}''_0(0,k) \subseteqq \mathfrak{A}''_0 \subseteqq \mathfrak{A}'_0 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, l-1, \\
\mathfrak{A}'_l + \mathfrak{A}'_0(0,k) &\subseteqq \mathfrak{A}''_l + \mathfrak{A}''_0(0,k) = \mathfrak{A}''_l + \left(\mathfrak{A}''_0(0,k-1) \cup \{k\}\right) \\
&= \left(\mathfrak{A}''_l + \mathfrak{A}''_0(0,k-1)\right) \cup \left(\mathfrak{A}''_l + k\right) \subseteqq \mathfrak{A}''_0 \cup \left(\mathfrak{A}''_l + k\right) = \mathfrak{A}'_0 \\
\mathfrak{A}'_\nu + \mathfrak{A}'_0(0,k-1) &= \mathfrak{A}''_\nu + \mathfrak{A}''_0(0,k-1) \subseteqq \mathfrak{A}''_0 \subseteqq \mathfrak{A}'_0 \quad \text{für} \quad \nu = l+1, \ldots, n;
\end{aligned}$$

das sind gerade die Formeln (25).

Schließlich folgt aus (12) die Gleichung

$$\begin{aligned}
A'_0(0,x) + A'_l(1, x-k) &= A'_0(0,x) + A'_l(-k, x-k) - 1 \\
&= A''_0(0,x) + A''_l(-k, x-k) - 1 = A''_0(0,x) + A''_l(1, x-k)
\end{aligned}$$

und daher, da $\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{A}''_\nu$ ist für $\nu \neq 0, l$, auch die Formel (26). Aus (25) und (26) folgt aber, wie unter a) gezeigt, die Ungleichung (24), womit der Beweis beendet ist.

Der zweite Satz, der jetzt bewiesen werden soll, ist eng verwandt mit einer Abschätzung von OSTMANN [8]. Für $n = 1$ ist VIII. ein Spezialfall der Formel (10) aus [8]. Der Beweis für die volle Aussage (10) aus [8] könnte ohne große Mühe ähnlich wie der Beweis von VIII. geführt werden. Wir wollen das aber nicht tun, da sich am Schluß als Anwendung unseres Hauptsatzes ein umfassenderes Ergebnis (Satz 3) erreichen läßt.

VIII. Es sei $0 \in \mathfrak{A}_\nu$ *für* $\nu = 1, \ldots, n$ *und* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$; *enthält* $\mathfrak{A}_0$ k *aufeinanderfolgende Zahlen, so gilt entweder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \frac{k}{k+n}\, \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \quad \textit{oder} \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}.$$

Beweis. Es seien die Zahlen $a_0, a_0+1, \ldots, a_0+k-1$ in $\mathfrak{A}_0$ enthalten. Indem wir $\mathfrak{A}_0$ durch $\mathfrak{A}_0 - a_0$ (und damit $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A} - a_0$) ersetzen, können wir uns auf den Fall $a_0 = 0$, d.h. $0, 1, \ldots, k-1 \in \mathfrak{A}_0$ beschränken. Auf Grund der Formeln (13) bis (16) genügt es weiter — ähnlich wie beim Beweis von IV. — den Beweis nicht für $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ sondern für irgendwelche abgeleiteten Mengen zu führen. Nach (17) können wir daher zusätzlich voraussetzen, daß $\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu\right) + \{0, 1, \ldots, k-1\} \subseteqq \mathfrak{A}_0$ ist. Es sei jetzt γ eine Konstante, die kleiner als $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ ist; im übrigen sei γ beliebig, falls $\frac{k}{k+n}\, \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \leqq 1$ ist und $\gamma = \frac{k+n}{k}$ sonst, so daß also in jedem Falle $\frac{k}{k+n}\, \gamma \leqq 1$ ist. Unter diesen Bedingungen ist für ein genügend großes x_0 sicher

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1, x) \geqq \gamma x \quad \text{für} \quad x \geqq x_0.$$

Wir wählen x_0 möglichst klein, so daß jedenfalls

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1, x_0 - 1) \leqq \gamma(x_0 - 1)$$

ist; trifft die erste Ungleichung für alle x zu, so setze man $x_0 = 1$. Durch Subtraktion folgt dann

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x) \geq \gamma(x - x_0 + 1) \quad \text{für} \quad x \geq x_0. \tag{27}$$

Für $\nu = 1, \ldots, n$ sei x_ν die kleinste Zahl aus $\mathfrak{A}_\nu(x_0, \infty)$, also die kleinste Zahl aus $\mathfrak{A}_\nu$, die nicht kleiner als x_0 ist; dabei denken wir uns die Numerierung so gewählt, daß $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ ist. Wir bezeichnen für $\nu = 0, 1, \ldots, n$ mit $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$ die Menge der nichtnegativen Zahlen aus $\mathfrak{A}_\nu - x_\nu$. Dann ist $0 \in \overline{\mathfrak{A}}_\nu$ für $\nu = 1, \ldots, n$ wegen $x_\nu \in \mathfrak{A}_\nu$, und es gilt

$$\begin{aligned} \bar{A}_0(0, x) &= A_0(x_0, x_0 + x) \\ \bar{A}_\nu(1, x) &= A_\nu(x_\nu + 1, x_\nu + x) \\ &= A_\nu(x_0, x_\nu + x) - 1 \geq A_\nu(x_0, x_0 + x) - 1 \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

letzteres da x_ν die einzige Zahl zwischen x_0 und x_ν ist, die in $\mathfrak{A}_\nu$ liegt. Wir wollen jetzt auf die Mengen $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$ den Satz VII. anwenden. Dazu müssen wir die Summe

$$\begin{aligned} S(x) &= \bar{A}_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{n} \bar{A}_\nu(1, x) \\ &= A_0(x_0, x_0 + x) + \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu(x_\nu + 1, x_\nu + x) \geq \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x_0 + x) - n \end{aligned}$$

nach unten abschätzen. Wir unterscheiden drei Fälle.

a) Ist $0 \leqq x < x_1 - x_0$, also $x_0 + x < x_1$, so ist $A_\nu(x_0, x_0 + x) = 0$ für $\nu = 1, \ldots, n$ und daher nach (27)

$$S(x) \geq A_0(x_0, x_0 + x) = \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x_0 + x) \geqq \gamma(x + 1).$$

b) Ist $x_1 - x_0 \leqq x < x_1 - x_0 + k$, so benutzen wir, daß

$$x_1 + \{0, 1, \ldots, k-1\} \subseteqq \Big(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}_\nu \Big) + \{0, 1, \ldots, k-1\} \subseteqq \mathfrak{A}_0$$

ist. Wegen $x_1 \leqq x_0 + x < x_1 + k$ folgt daraus $\{x_1, x_1 + 1, \ldots, x_0 + x\} \subseteqq \mathfrak{A}_0$, also $A_0(x_1, x_0 + x) = x_0 + x - x_1 + 1$ und daher

$$S(x) \geqq A_0(x_0, x_0 + x) = A_0(x_0, x_1 - 1) + A_0(x_1, x_0 + x).$$

Daraus folgt wie unter a) und wegen $\frac{k}{k+n}\gamma \leqq 1$

$$S(x) \geqq \gamma(x_1 - x_0) + (x_0 + x - x_1 + 1) \geqq \frac{k}{k+n}\gamma(x + 1).$$

c) Ist $x \geqq x_1 - x_0 + k$, so ist einerseits nach b)

$$S(x) \geqq S(x_1 - x_0 + k - 1) \geqq \gamma(x_1 - x_0) + k \geqq k,$$

andererseits nach (27)

$$S(x) \geqq \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(x_0, x_0 + x) - n \geqq \gamma(x + 1) - n.$$

Beides zusammen ergibt $S(x) \geqq \alpha(x+1)$ mit $\alpha = \min_x \max\left\{\frac{k}{x+1}, \gamma - \frac{n}{x+1}\right\}$. Die beiden Ausdrücke in der Klammer sind monotone Funktionen von x, der erste abnehmend, der zweite zunehmend. Ihr Maximum ist also dort am kleinsten, wo beide übereinstimmen, d. h. für $\frac{k+n}{x+1} = \gamma$; das liefert $\alpha = \frac{k}{k+n}\gamma$.

In allen drei Fällen a), b) und c) gilt demnach die Abschätzung

$$\bar{A}_0(0, x) + \sum_{\nu=1}^{n} \bar{A}_\nu(1, x) \geqq \frac{k}{k+n}\gamma(x+1).$$

Für die Summe $\overline{\mathfrak{A}} = \sum_{\nu=0}^{n} \overline{\mathfrak{A}}_\nu$ folgt nach VII. also $\bar{A}(0, x) \geqq \frac{k}{k+n}\gamma(x+1)$. War nun $\frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) > 1$, so hatten wir $\frac{k}{k+n}\gamma = 1$ gesetzt. Wir erhalten also $\bar{A}(0, x) \geqq x+1$; das bedeutet, daß $\overline{\mathfrak{A}}$ alle nichtnegativen Zahlen enthält, insbesondere also $\overline{\mathfrak{A}} \sim \mathfrak{Z}$. Wegen $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu \geqq \sum_{\nu=0}^{n} (\overline{\mathfrak{A}}_\nu + x_\nu) = \overline{\mathfrak{A}} + \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu$ folgt daraus $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$. War aber $\frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) \leqq 1$, so erhalten wir $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\overline{\mathfrak{A}}) \geqq \frac{k}{k+n}\gamma$ und, da γ nur der Einschränkung $\gamma < \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ unterlag, auch $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ wie behauptet.

§ 3. Schluß des Beweises.

Am Ende des § 1 blieb uns die Aufgabe, den Satz VI zu beweisen. Das soll jetzt geschehen. Die Behauptung lautete, daß unter gewissen Voraussetzungen über die Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ für ihre Summe $\mathfrak{A}$ entweder $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ oder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ gilt. Schon in § 1 hatten wir an Hand der Formel (18) gesehen, daß die erste Formel sicher richtig ist, falls die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ unbeschränkt sind, wenn $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ die sämtlichen von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleiteten Mengensysteme durchläuft. Wir können daher die zusätzliche Voraussetzung machen:

IX. Die Zahlen $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ seien für alle von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ beschränkt.

Die Aussage VI. ist jetzt, nachdem wir den Satz VIII bewiesen haben, eine leichte Folge aus dem

Hilfssatz 4. *Unter den Voraussetzungen von VI. und IX. gibt es zu jeder natürlichen Zahl k ein von $\{\mathfrak{A}_\nu\}$ abgeleitetes System von Mengen $\{\mathfrak{A}'_\nu\}$ derart, daß $\mathfrak{A}'_0$ mindestens kg aufeinanderfolgende Zahlen enthält.*

Beweis von VI. Wir wenden auf die Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ aus Hilfssatz 4 die Aussage VIII. an und erhalten für die Summe $\mathfrak{A}' = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ entweder $\delta(\mathfrak{A}') \geqq \frac{kg}{kg+n}\delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n)$ oder $\mathfrak{A}' \sim \mathfrak{Z}$. Trifft für irgendein k einmal die zweite Möglichkeit zu, so sind wir fertig, denn wegen (13) $\mathfrak{A}' \leqq \mathfrak{A}$ folgt dann auch

$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$. Anderenfalls haben wir nach (13) und (14) für alle k

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}') \geq \frac{k\,g}{k\,g+n}\,\delta(\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n) = \frac{k\,g}{k\,g+n}\,\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$$

und daher $\delta(\mathfrak{A}) \geq \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ wie behauptet.

Den Beweis für den Hilfssatz 4 führen wir durch Induktion nach k. Für $k=1$ setzen wir $\mathfrak{A}'_\nu = \mathfrak{A}_\nu$; die Behauptung ist dann eine der Voraussetzungen von VI. Für den Induktionsschluß brauchen wir einen weiteren Hilfssatz, dessen Beweis wir am Schluß nachtragen.

Hilfssatz 5. *Ist unter den Voraussetzungen von VI. und IX. $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, so gibt es von $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ und eine Zahl z derart, daß $\mathfrak{E}+z$ und $\mathfrak{E}+z+g$ in $\mathfrak{A}'_0$ liegen.*

Wir nehmen an, der Hilfssatz 4 sei schon für $k=l$ bewiesen. Dann gibt es also abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$, von denen $\mathfrak{A}'_0$ mindestens $l\,g$ aufeinanderfolgende Zahlen, etwa $x, x+1, \ldots, x+l\,g-1$ enthält. Diese Mengen erfüllen, wie man sich leicht überzeugt, ebenfalls die Voraussetzungen von VI. und IX. Wir können daher auf sie und die endliche Menge $\mathfrak{E} = \{x, x+1, \ldots, x+l\,g-1\}$ den Hilfssatz 5 anwenden. So erhalten wir von $\mathfrak{A}'_0, \ldots, \mathfrak{A}'_n$ abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ mit der Eigenschaft $(\mathfrak{E}+z) \cup (\mathfrak{E}+z+g) \subseteq \mathfrak{A}''_0$. Nun ist

$$\begin{aligned}(\mathfrak{E}+z) &\cup (\mathfrak{E}+z+g)\\ &= \{x+z, \ldots, x+z+l\,g-1\} \cup \{x+z+g, \ldots, x+z+(l+1)\,g-1\}\\ &= \{x+z, x+z+1, \ldots, x+z+(l+1)\,g-1\};\end{aligned}$$

$\mathfrak{A}''_0$ enthält also die $(l+1)\,g$ aufeinanderfolgenden Zahlen von $x+z$ bis $x+z+(l+1)\,g-1$. Der Hilfssatz 4 ist daher auch für $k=l+1$ und damit allgemein bewiesen.

Wir haben jetzt noch den Hilfssatz 5 zu beweisen. Dazu suchen wir unter den abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ solche aus, für die $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$ möglichst groß ist. Für alle von $\mathfrak{A}'_\nu$ abgeleiteten Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ gilt dann nach (16) $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu \subseteq \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ und daher auf Grund der Definition von $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right)$ als kleinster positiver Differenz von Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ die Ungleichung $f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu\right) \geq f\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right) = f$. Wegen der Auswahl der Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ muß hier das Gleichheitszeichen gelten. Die Menge $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ enthält also stets zwei Zahlen mit der Differenz f. Außerdem seien die Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ so gewählt, daß sich die Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ auf möglichst wenig Restklassen modulo f verteilen; es seien dies etwa die Restklassen $b_1, \ldots, b_r$. Die Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ liegen dann auch in diesen Restklassen und wegen der Minimaleigenschaft von $\mathfrak{A}'_\nu$ gibt es zu jedem b_ϱ ein $x_\varrho \in \bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ mit $x_\varrho \equiv b_\varrho \bmod f$.

Wir erinnern uns jetzt noch einmal an die Definition der Zahl $g = g\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu\right)$; sie war der größte gemeinsame Teiler aller Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$. g läßt sich also als ganzzahlige Linearkombination von Zahlen aus $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}'_\nu$ darstellen. Gehen wir in dieser Darstellung zur Kongruenz modulo f über, so erhalten wir $g \equiv \sum_{\varrho=1}^{r} n_\varrho b_\varrho \bmod f$ mit gewissen ganzen Zahlen n_ϱ; diese können wir modulo f abändern und daher ohne Einschränkung annehmen, daß sie nicht negativ sind. Die Kongruenz schreiben wir noch etwas um: $g \equiv \sum_{\sigma=1}^{s} c_\sigma \bmod f$, wobei jedes c_σ gleich einer der Restklassen b_ϱ ist und b_ϱ gerade n_ϱ-mal vorkommt.

Es sei jetzt $\mathfrak{E}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{A}_0$, also nach (16) auch von $\mathfrak{A}'_0$. Nach (17) gibt es abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}''_\nu$ mit der Eigenschaft $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu + \mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}''_0$. Nun wissen wir, daß in $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}''_\nu$ eine Zahl $x_1 \equiv c_1 (\equiv b_\varrho) \bmod f$ liegt. Also haben wir speziell $\mathfrak{E} + x_1 \subseteqq \mathfrak{A}''_0$. Wenden wir den gleichen Schluß auf $\mathfrak{E} + x_1$, $\mathfrak{A}''_\nu$, c_2 an Stelle von $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}'_\nu$, c_1 an, so erhalten wir abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'''_\nu$ mit $\mathfrak{E} + x_1 + x_2 \subseteqq \mathfrak{A}'''_0$ und $x_2 \equiv c_2 \bmod f$. So fahren wir fort und erhalten schließlich gewisse Mengen $\mathfrak{A}^*_\nu$ mit $\mathfrak{E} + \sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma \subseteqq \mathfrak{A}^*_0$ und $\sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma \equiv \sum_{\sigma=1}^{s} c_\sigma \equiv g \bmod f$. Außerdem ist $\mathfrak{E} \subseteqq \mathfrak{A}_0 \subseteqq \mathfrak{A}^*_0$. Setzen wir $\sum_{\sigma=1}^{s} x_\sigma = g + k f$, so haben wir also

$$\mathfrak{E} \cup (\mathfrak{E} + g + k f) \subseteqq \mathfrak{A}^*_0. \tag{28}$$

Wir wenden nun nochmal die Formel (17) an und erhalten Mengen $\mathfrak{A}^{**}_\nu$ mit $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}^{**}_\nu + [\mathfrak{E} \cup (\mathfrak{E} + g + k f)] \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_0$. In $\bigcup_{\nu=1}^{n} \mathfrak{A}^{**}_\nu$ gibt es, wie wir oben gesehen hatten, zwei Zahlen mit der Differenz f, etwa y und $y + f$. Also haben wir $(\mathfrak{E} + y) \cup (\mathfrak{E} + y + g + k f) \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_\nu$ und $(\mathfrak{E} + y + f) \cup (\mathfrak{E} + y + g + (k+1) f) \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_\nu$. Ist k positiv, so setzen wir $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + y + f$ und haben dann $\mathfrak{E}^* \cup (\mathfrak{E}^* + g + (k-1) f) \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_0$. Ist aber k negativ, so sei $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + y$; dann gilt $\mathfrak{E}^* \cup (\mathfrak{E}^* + g + (k+1) f) \subseteqq \mathfrak{A}^{**}_0$. Diese Formeln sind genau so gebaut wie (28), nur daß $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E} + y_1$ ($y_1 = y + f$ oder $y_1 = y$) und k durch eine Zahl ersetzt ist, deren Betrag um 1 kleiner ist. Wenden wir dies Verfahren $|k|$-mal an, so erhalten wir schließlich abgeleitete Mengen $\mathfrak{A}'_\nu$ derart, daß $\mathfrak{E}' \cup (\mathfrak{E}' + g) \subseteqq \mathfrak{A}'_0$ gilt mit $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E} + y_1 + y_2 + \cdots + y_k = \mathfrak{E} + z$. Das ist aber gerade die Behauptung.

§ 4. Anwendungen.

In diesem Abschnitt sollen einige Folgerungen aus dem Hauptsatz gezogen werden. Als erstes legen wir uns die Frage vor, was man über die Dichte $\delta(\mathfrak{A})$ der Summenmenge $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ aussagen kann, wenn man nur die Dichte $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$ kennt. Ist einer der Summanden $\mathfrak{A}_\nu$ leer, so gilt das

gleiche von der Summe $\mathfrak{A}$; diesen trivialen Fall schließen wir aus. Dann ist es keine wesentliche Einschränkung, wenn wir annehmen, daß die Null in allen Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ liegt: Wir können ja anderenfalls $\mathfrak{A}_\nu$ durch $\mathfrak{A}_\nu - a_\nu$ ersetzen. Dann gilt also $\mathfrak{A}_\nu \subseteq \mathfrak{A}$ und daher $A(1,x) \geqq \operatorname{Max}_\nu A_\nu(1,x) \geqq \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(1,x)$. Daraus folgt $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \frac{1}{n+1}\, \delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$. Diese Abschätzung läßt sich auch ohne weitere Voraussetzungen nicht mehr viel verbessern, wie die folgenden Beispiele zeigen. Es seien σ eine reelle Zahl zwischen 0 und $n+1$, g und m zwei natürliche Zahlen so, daß $\sigma \leqq \frac{n+m}{g} \leqq n+1$; dann gibt es natürliche Zahlen $k_0, \ldots, k_n$ mit $k_\nu \leqq g$ und $\sum_{\nu=0}^{n} k_\nu = n+m$. Es bestehe jetzt die Menge $\mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ aus den Restklassen $0, 1, \ldots, k_\nu - 1$ modulo g. Dann besteht $\mathfrak{A}^{(g)} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ aus den Restklassen $0, 1, \ldots, m-1$ modulo g. Sind $\mathfrak{A}_\nu$ Teilmengen von $\mathfrak{A}_\nu^{(g)}$ derart, daß $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ ist — wegen $\sigma \leqq \frac{n+m}{g} = \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)})$ gibt es das —, so haben wir für die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Ungleichung $\delta(\mathfrak{A}) \leqq \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) = \frac{m}{g}$. Wählen wir insbesondere $m=1$ und g so, daß $\frac{n+1}{g+1} < \sigma \leqq \frac{n+1}{g}$ ist, also $g = \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]$, so gilt $\delta(\mathfrak{A}) \leqq \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}$. Aus der Gleichung $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ läßt sich also über die Abschätzung $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \frac{\sigma}{n+1}$ hinaus sicher nicht mehr als $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}$ schließen. Diese Ungleichung ist aber auch allgemeingültig:

Satz 1. *Sind $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ nicht leere Mengen und ist $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$, so gilt für die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \operatorname*{Min}_{\substack{m,\, g = 1,2,\ldots \\ n+m \geqq \sigma g}} \frac{m}{g} = \left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}. \tag{29}$$

Beweis. Auf Grund des Dichtesatzes gilt entweder $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \sigma$, dann ist die Ungleichung in (29) sicher richtig, da die rechte Seite kleiner als σ ist; oder es gibt eine Zahl g, so daß $\delta(\mathfrak{A}) = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geqq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) - \frac{n}{g}$ ist. Besteht $\mathfrak{A}^{(g)}$ aus m Restklassen modulo g, so ist $\delta(\mathfrak{A}) = \frac{m}{g}$ und daher $\sigma \leqq \delta(\mathfrak{A}_0^{(g)}, \ldots, \mathfrak{A}_n^{(g)}) \leqq \frac{n+m}{g}$. Daraus folgt $\delta(\mathfrak{A}) = \frac{m}{g} \geqq \operatorname{Min} \frac{m}{g}$ wie behauptet. Es bleibt zu zeigen, daß die rechte Seite gleich $\left[\frac{n+1}{\sigma}\right]^{-1}$ ist. Anders ausgedrückt: $\operatorname{Min} \frac{m}{g} = \frac{1}{h}$ falls $\frac{n+1}{h+1} < \sigma \leqq \frac{n+1}{h}$ ist. Nun gilt sicher $\operatorname{Min} \frac{m}{g} \leqq \frac{1}{h}$, da ja $m=1$, $g=h$ bei der Bildung des Minimums zugelassen ist. Wir haben also nur zu zeigen: Aus $\frac{n+m}{g} \geqq \sigma > \frac{n+1}{h+1}$ folgt $\frac{m}{g} \geqq \frac{1}{h}$. Oder umgekehrt: Aus $\frac{m}{g} < \frac{1}{h}$ folgt $\frac{n+m}{g} \leqq \frac{n+1}{h+1}$. Oder auch, da g, h und m ganze Zahlen sind: Aus $g \geqq m\,h+1$

folgt $g(n+1) \geq (h+1)(n+m)$ und das sieht man so:

$$g(n+1) - (h+1)(n+m) \geq (mh+1)(n+1) - (h+1)(n+m)$$
$$= (m-1)(hn-1) \geq 0.$$

Als zweites fragen wir uns, wie sich die eben erhaltene Ungleichung verschärfen läßt, wenn wir nicht nur $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, sondern die einzelnen Dichten $\delta(\mathfrak{A}_\nu)$ kennen. Entsprechend wie im Beweis von Satz 1 erkennt man, daß der Satz 2 richtig ist, und an Hand der gleichen Beispiele wie oben sieht man auch, daß sich die Ungleichung (30) nicht verbessern läßt; das gleiche gilt auch von den weiter unten stehenden Ungleichungen (31), (32) und (33).

Satz 2. *Sind $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n$ nicht leere Mengen und ist $\delta(\mathfrak{A}_\nu) = \alpha_\nu$, so gilt für die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ die Ungleichung*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \operatorname*{Min}_{\substack{m_\nu, g = 1, 2, \ldots \\ m_\nu \geq \alpha_\nu g}} \frac{m_0 + \cdots + m_n - n}{g}. \tag{30}$$

Aus diesem Satz kann man entnehmen, daß für gewisse Werte von n und α_ν ohne weitere Voraussetzungen die Ungleichung $\delta(\mathfrak{A}) \geq \sum_{\nu=0}^{n} \delta(\mathfrak{A}_\nu)$ folgt. Ist nämlich $n = 1$, α_0 und α_1 irrational und $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$, so folgt aus $m_\nu \geq \alpha_\nu g$ sogar $m_\nu > \alpha_\nu g$ und daher $m_0 + m_1 > (\alpha_0 + \alpha_1) g = g$, d.h. $m_0 + m_1 \geq g + 1$ also $\frac{m_0 + m_1 - 1}{g} \geq 1$. Daraus folgt $\operatorname{Min} \frac{m_0 + m_1 - 1}{g} = 1 = \alpha_0 + \alpha_1$ wie behauptet. Es gilt also die

Folgerung: Ist $\delta(\mathfrak{A}) + \delta(\mathfrak{B}) = 1$, $\delta(\mathfrak{A})$ und $\delta(\mathfrak{B})$ irrational, so gilt

$$\delta(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = 1 = \delta(\mathfrak{A}) + \delta(\mathfrak{B}).$$

Man kann sich überlegen, daß dies der einzige Fall ist [außer dem trivialen, daß $\delta(\mathfrak{A}_\nu) = 0$ ist für alle $\mathfrak{A}_\nu$ außer einem], in dem ohne weiteres folgt $\delta(\mathfrak{A}) \geq \sum_{\nu=0}^{n} \delta(\mathfrak{A}_\nu)$.

Wir wollen jetzt, um schärfere Abschätzungen zu erhalten, zusätzliche Voraussetzungen über die Mengen $\mathfrak{A}_\nu$ bzw. $\mathfrak{A}$ machen. Zunächst nehmen wir einmal an, daß k aufeinanderfolgende Zahlen in $\mathfrak{A}$ liegen. Liegt dann der zweite Fall des Hauptsatzes vor, so kann entweder $g \leqq k$ sein, dann enthält $\mathfrak{A}$ aus jeder Restklasse modulo g eine Zahl und wir haben $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}^{(g)} = \mathfrak{Z}$; oder es ist $g \geq k$, dann enthält $\mathfrak{A}^{(g)}$ mindestens k Restklassen modulo g; es liegt daher, wenn wir $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ kennen, die gleiche Situation wie beim Beweis von Satz 1 vor, nur daß für g und m die zusätzlichen Bedingungen $g, m \geq k$ hinzukommen. Also gilt der

Satz 3: *Ist $\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n) = \sigma$ und enthält die Summe $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu$ mindestens k aufeinanderfolgende Zahlen, so ist entweder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ oder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geq \operatorname*{Min}_{\substack{m, g = k, k+1, \ldots \\ n + m \geqq \sigma g}} \frac{m}{g}. \tag{31}$$

Wenn wir die Formel (31) etwas abschwächen erhalten wir eine handlichere Abschätzung. Es ist ja für jedes Paar (m, g), das den Bedingungen aus (31) genügt, $\frac{m}{g} = \frac{m}{n+m}\frac{n+m}{g} \geqq \frac{k}{k+n}\sigma$. Also gilt die

Folgerung: Unter den Voraussetzungen von Satz 3 gilt entweder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ oder $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \frac{k}{k+n}\delta(\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n)$.

Die Abschätzung (10) aus [8] von OSTMANN ist hierin enthalten, wenn man $n = 1$ setzt. Aus der Definition der dort vorkommenden Zahl j folgt nämlich leicht, daß die Zahlen $0, 1, \ldots, j-1$ in der Summenmenge liegen.

Wie der zweite Satz zum ersten verhält sich zum dritten der

Satz 4: *Ist* $\delta(\mathfrak{A}_\nu) = \alpha_\nu$ *und enthält* $\mathfrak{A}_\nu$ *mindestens* k_ν *aufeinanderfolgende Zahlen, so ist entweder* $\mathfrak{A} = \sum_{\nu=0}^{n} \mathfrak{A}_\nu \sim \mathfrak{Z}$ *oder*

$$\delta(\mathfrak{A}) \geqq \operatorname*{Min}_{\substack{m_\nu = k_\nu, k_\nu+1, \ldots \\ m_\nu \geqq \alpha_\nu g}} \frac{m_0 + \cdots + m_n - n}{g}. \tag{32}$$

Folgerung: Ist $0 \leqq \varkappa_\nu \leqq k_\nu$ und $\sum_{\nu=0}^{n} \varkappa_\nu = n$, so gilt unter den Voraussetzungen von Satz 4 entweder $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ oder $\delta(\mathfrak{A}) \geqq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{k_\nu - \varkappa_\nu}{k_\nu}\delta(\mathfrak{A}_\nu)$.

Der Beweis für den Satz 4 entspricht genau den vorangehenden. Den Beweis für die Folgerung liest man aus der Ungleichung

$$\frac{m_0 + \cdots + m_n - n}{g} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{m_\nu - \varkappa_\nu}{m_\nu} \cdot \frac{m_\nu}{g} \geqq \sum_{\nu=0}^{n} \frac{k_\nu - \varkappa_\nu}{k_\nu}\alpha_\nu$$

ab.

Setzt man in der Folgerung $n = 1$, $\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_1 = 1$, so erhält man eine Verallgemeinerung einer Abschätzung von ERDÖS [6], die OSTMANN [8], [9] angegeben hat.

Zum Schluß wollen wir noch die Ordnung einer Menge $\mathfrak{A}$ von positiver Dichte α abschätzen. Haben die Zahlen von $\mathfrak{A}$ einen gemeinsamen Teiler, ist also $g(\mathfrak{A}) > 1$, so haben auch die Zahlen aus $n\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{A}$ diesen Teiler. In diesem Fall ist $\mathfrak{A}$ also keine Basis der Menge aller Zahlen. Ist aber $g(\mathfrak{A}) = 1$ und enthält $\mathfrak{A}$ die Null, so ist für genügend großes n sicher $n\,\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ ([10] S. 205). Die kleinste Zahl n, für die dies gilt, nennt man die (asymptotische) Ordnung von $\mathfrak{A}$. Sie ist also durch die Eigenschaften $n\,\mathfrak{A} \sim \mathfrak{Z}$ und $(n-1)\,\mathfrak{A} \nsim \mathfrak{Z}$ bestimmt. Aus der zweiten Eigenschaft leiten wir eine Abschätzung für n her. Wir wenden den Hauptsatz auf die Summe $\mathfrak{B} = (n-1)\,\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \cdots + \mathfrak{A}$ an. Das liefert entweder $1 \geqq \delta(\mathfrak{B}) \geqq (n-1)\,\delta(\mathfrak{A})$, also $n \leqq \frac{1}{\alpha} + 1$ und das hat, da n ganz ist, die Ungleichung (33) zur Folge; oder es ist $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}^{(g)}$ und $\delta(\mathfrak{B}^{(g)}) \geqq (n-1)\,\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) - \frac{n-2}{g}$ mit einer gewissen Zahl g. Wegen $\mathfrak{B} \nsim \mathfrak{Z}$ ist auch $\mathfrak{B}^{(g)} \nsim \mathfrak{Z}$ und daher $\delta(\mathfrak{B}^{(g)}) \leqq \frac{g-1}{g}$. Enthält $\mathfrak{A}^{(g)}$ etwa k Restklassen

modulo g, so gilt $k \geqq 2$ wegen $g(\mathfrak{A}) = 1$ und $\frac{k}{g} = \delta(\mathfrak{A}^{(g)}) \geqq \delta(\mathfrak{A}) = \alpha$; zusammengenommen gibt das $\frac{g-1}{g} \geqq \delta(\mathfrak{B}^{(g)}) \geqq (n-1)\,\delta(\mathfrak{A}^{(g)}) - \frac{n-2}{g} = (n-1)\frac{k}{g} - \frac{n-2}{g}$ und daher $n - 1 \leqq \frac{g-2}{k-1}$. Ist $\alpha > \frac{1}{2}$, so folgt $n - 1 \leqq \frac{k\alpha^{-1} - 2}{k-1} < \frac{2k-2}{k-1} = 2$, also $n \leqq 2$. Ist aber $\alpha \leqq \frac{1}{2}$, so sei $\frac{2}{h+1} < \alpha \leqq \frac{2}{h}$ mit $h = \left[\frac{2}{\alpha}\right] \geqq 4$; wir behaupten, daß dann $n \leqq h - 1$ ist. Dazu genügt es zu zeigen: Aus $\frac{k}{g} \geqq \alpha > \frac{2}{h+1}$ und $n - 1 \leqq \frac{g-2}{k-1}$ folgt $n \leqq h - 1$; oder: Aus $k(h+1) > 2g$ folgt $\frac{g-2}{k-1} < h - 1$, da dann $n - 1 \leqq \frac{g-2}{k-1} < h - 1$ und daher $n \leqq h - 1$ ist. Oder umgekehrt: Aus $g - 2 \geqq (k-1)(h-1)$ folgt $2g \geqq k(h+1)$, und das sieht man so:

$$2g - k(h+1) \geqq 2(k-1)(h-1) + 4 - k(h+1) = (k-2)(h-3) \geqq 0,$$

da ja $k \geqq 2$ und $h \geqq 4$ war. Damit haben wir den Satz 5 bewiesen.

Satz 5. *Ist* $0 \in \mathfrak{A}$, $\delta(\mathfrak{A}) = \alpha > 0$ *und* $g(\mathfrak{A}) = 1$, *so gilt für die asymptotische Ordnung* n *von* $\mathfrak{A}$ *die Abschätzung*

$$(33) \qquad n \leqq \begin{cases} 2 & \text{für } \alpha > \frac{1}{2} \\ \left[\frac{2}{\alpha}\right] - 1 & \text{für } \alpha \leqq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Literatur.

[1] CHINTSCHIN, A. J.: Drei Perlen der Zahlentheorie. Berlin: Akademie-Verlag 1951. — [2] CHOWLA, I.: A theorem on the addition of residue classes: Application to the number $\Gamma(k)$ in Warings problem. Proc. Ind. Acad. **2**, 242—243 (1935). — [3] CORPUT, J. G. VAN DER: On sets of integers I, II, III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **50**, 252—261, 340—350, 429—435 (1947). — [4] DAVENPORT, H.: On the addition of residue classes. J. London Math. Soc. **10**, 30—32 (1935). — [5] DYSON, F. J.: A theorem on the densities of sets of integers. J. London Math. Soc. **20**, 8—14 (1945). — [6] ERDÖS, P.: On the asymptotic density of the sum of two sequences. Ann. of Math. **43**, 65—68 (1942). — [7] MANN, H. B.: A proof of the fundamental theorem on the density of sums of sets of positive integers. Ann. of Math. **43**, 523—527 (1942). — [8] OSTMANN, H. H.: Über die Dichte additiv komponierter Zahlenmengen. Arch. Math. **1**, 393—401 (1948). — [9] OSTMANN, H. H.: Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe. J. reine angew. Math. **187**, 183—188 (1950). — [10] ROHRBACH, H.: Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jb. DMV **48**, 199—236 (1938).

Heidelberg, Mathematisches Institut, Hauptstr. 47—51.

(Eingegangen am 10. April 1953.)

Inhalt und Maß

Von Dr. **Karl Mayrhofer**, o. Universitätsprofessor der Mathematik, wirkl. Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften in Wien. Mit 17 Figuren. VIII, 269 Seiten. 1952. (W) DM 36.—; Ganzleinen DM 39.—

Das Buch entwickelt die klassische und moderne Theorie der Inhalte und Maße. Daneben werden mannigfache spezielle Probleme behandelt. Zahlreiche Sätze sind von entbehrlichen Voraussetzungen gelöst oder neu aufgestellt, Beweise verschiedentlich verbessert oder neu geführt worden. Ein in sich geschlossener Abschnitt stellt die notwendigen Hilfsmittel für das Rechnen mit abstrakten Mengen (Somen) zusammen und ist von allgemeinem Interesse. Besondere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt, wohl aber eine gewisse Gewandtheit im abstrakten Denken. Das Buch wendet sich an jeden mathematisch interessierten Leser.

Inhaltsübersicht: **Abstrakte Inhalte und Maße.** Hilfsmittel aus der Mengenlehre. — Additive Inhalte. — Volladditive Inhalte und Maße. — Maßgleiche Hüllen und Kerne. — Vollständige Inhalte und Maße. — Vervollständigung eines Inhaltes und eines Maßes. — Erweiterung eines volladditiven Inhaltes zu einem Maße. — Kriterien für die j-Meßbarkeit. — Inhalt und Maß in Produkträumen. — **Der Jordansche Inhalt.** Der elementare Inhalt der Würfelaggregate. — Der n-dimensionale Jordansche Inhalt. — Überdeckende Zellensysteme. — Inhalt spezieller Gebilde. — **Das Borelsche und das Lebesguesche Maß.** Das Borelsche Maß. — Das Lebesguesche Maß. — Nicht nach Lebesgue meßbare Mengen.— Der Überdeckungssatz von Vitali. — Dichte einer Punktmenge. — **Transformation von Inhalt und Maß.** Lineare Transformationen. — Transformation von Inhalt und Maß. — Inhalt und Maß elementarer Gebilde. — **Theorie der äußeren Maße.** Äußere und innere Maße. — Die Außenfunktion der ko-Erweiterung eines volladditiven Inhalts als äußeres Maß. — **Verbände und Somenfunktionen.** Boolesche Verbände. — Isomorphieen und Homomorphien. — Somenfunktionen. — **Anhang.** Borelsche Mengen.

Die Welt der Vektoren. Einführung in Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren.

Von Dr.-Ing. Dipl.-Ing. **Franz Ollendorff**, Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums, The Hebrew Technical College, Haifa (Israel). Mit 68 Textabbildungen. VIII, 470 Seiten. 1950. (W)
DM 37.50; Ganzleinen DM 40.—

Inhaltsübersicht: Skalare und Vektoren. — Vektorfelder. — Vektorrechnung in affinen Koordinaten. — Algebra der Tensoren. — Tensoranalysis im affinen Raum. — Der Minkowskische Raum. — Der Riemannsche Raum. — Der Hilbertsche Raum.

Aus den Besprechungen: ... Unter allen bisher vorliegenden, zum Teil sehr ausgezeichneten, deutschsprachigen Lehrbüchern der Vektor- und Tensorrechnung hat das vorliegende ein ganz besonderes, eigenständiges Gepräge. Es ist ohne Zweifel in der ganzen Konzeption das universellste Buch über Vektoren, Tensoren und Operatoren, das wir gegenwärtig besitzen, und bringt nicht bloß Dinge, die man in den sonstigen landläufigen Lehrbüchern findet. Neben der klassischen Algebra und Analysis der Vektoren und Tensoren werden in ausführlicher Weise alle möglichen Anwendungen auf Mechanik und Physik berücksichtigt. Die staunenswert vielseitige Art des durchaus originellen Buches, das sich durch die ausgezeichnete Eigenart, in der es klassische und moderne Dinge verknüpft, von selbst bestens empfiehlt, kann am besten durch einen Auszug aus dem Inhaltsverzeichnis gekennzeichnet werden. Die lebendige sprachliche Darstellung und die ausgezeichnete Ausstattung seien ausdrücklich hervorgehoben.
„Archiv der Mathematik"

SPRINGER-VERLAG / WIEN

Ergebnisse der angewandten Mathematik

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik" herausgegeben von Professor Dr. **F. Lösch**, Stuttgart.

Erstes Heft:

Die praktische Behandlung von Integral-Gleichungen

Von Dr. habil. **H. Bückner**, Berlin. Mit 1 Textabbildung. VI, 127 Seiten. 1952. DM 18.60

Aus den Besprechungen: Die Integralgleichungen haben in allen exakten Wissenschaften eine so große Anwendung gefunden, daß ihre praktische Behandlung eine besondere Aufgabe wurde, zu deren Lösung schon viel beigetragen worden ist. Der Verf. hat sich der Mühe unterzogen, das vorhandene Material zusammenzufassen und zu erweitern, z. B. durch neue Ergebnisse von Wielandt. Leicht war die Aufgabe nicht, es ist viel schöner, eine elegante Theorie aufzubauen, als sich durch das dichte Gestrüpp der verschiedenen Rechenmethoden durchzuarbeiten. Bückner ordnet diese nach drei Gesichtspunkten. Erstens gibt er im zweiten Abschnitt Einschließungssätze, die, wie der Name andeutet, die Eigenwerte in relativ einfache Integrale einschließen; zweitens bespricht er im dritten Abschnitt die Iterationsverfahren, die hier, wie überall in der Praxis, von größter Bedeutung sind und drittens nähert er die gegebenen Kerne durch leichter zu behandelnde an, wobei auch die Störungstheorie behandelt wird, d.h. die Frage, wie die Eigenwerte durch die Änderung des Kerns beeinflußt werden. Hier ist auch der Platz für Untersuchungen von Erh. Schmidt, von Tricomi und von Rellich. Zum Schluß wird ein Ausblick auf die Möglichkeit maschineller Verfahren gegeben. Der erste Abschnitt gibt eine kurze Einführung in die Fredholmsche Theorie ohne ausführliche Beweise. Fast hundert Nummern umfaßt das Literaturverzeichnis. Im ganzen ein stark konzentriertes Werk für den Fachmann. *Professor Hamel-Berlin, in „Elektrotechnische Zeitschrift"*

Zweites Heft:

Die konfluente hypergeometrische Funktion

Mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen.

Von Dr.-Ing. **Herbert Buchholz**, a. pl. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt, wissenschaftlicher Mitarbeiter und Referent beim Fernmeldetechnischen Zentralamt der Deutschen Bundespost. Mit 9 Textabbildungen. XVI, 234 Seiten. 1953. DM 36.—

Inhaltsübersicht: **I. Die Differentialgleichung der konfluenten hypergeometrischen Funktion in ihren verschiedenen Formen und die Definitionen der sie lösenden Funktionen:** Die Kummersche Differentialgleichung und ihre Lösungen. Die Whittakersche Differentialgleichung und ihre Lösungen. Verwandte Differentialgleichungen. Die Funktionen des parabolischen Zylinders. Höhere Ableitungen. Die Funktionen des Drehparabols und des parabolischen Zylinders als Partikularintegrale der Wellengleichung in den entsprechenden Koordinaten. — **II. Allgemeine Integraldarstellungen für die parabolischen Funktionen selbst und ihre Produkte:** Integraldarstellungen für die einfachen parabolischen Funktionen. Integraldarstellungen für die Produkte aus zwei parabolischen Funktionen. — **III. Die Asymptotik der parabolischen Funktionen:** Die Asymptotik bei großen Werten von z oder μ oder $\varkappa$. Die Asymptotik bei großen Werten von z und $\varkappa$. — **IV. Unbestimmte und bestimmte Integrale mit parabolischen Funktionen und einige unendliche Reihen:** Unbestimmte Integrale mit parabolischen Funktionen. Die Laplace-Transformierte der parabolischen Funktionen. Verschiedene weitere Integrale mit parabolischen Funktionen und einige unendliche Reihen. — **V. Die den parabolischen Funktionen zugehörenden Polynome und unendliche Reihen mit diesen Polynomen:** Reihen und Integrale mit Laguerre-Polynomen. Reihen und Integrale mit Hermite-Polynomen. Weitere besondere Polynome und Funktionen. — **VI. Die Parameterintegrale in den Beziehungen für die verschiedenen Wellentypen der mathematischen Physik in den parabolischen Koordinaten:** Integrale über den vorderen Parameter von zwei und vier parabolischen Funktionen. Die Integraldarstellungen für die verschiedenen Wellentypen der mathematischen Physik. — **VII. Nullstellen und Eigenwerte:** Die Nullstellen der Funktion Mx, $\mu/2(z)$. Eigenwertprobleme mit parabolischen Funktionen. **Anhang. Schrifttums-** und **Sachverzeichnis.**

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik" erhalten die „Ergebnisse der angewandten Mathematik zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages, Berlin · Göttingen · Heidelberg, bei.

Springer-Verlag, Berlin · Göttingen · Heidelberg. — Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG., Würzburg.
Printed in Germany.